特　集 アセット・アロケーション

金利変動リスクと年金資金の戦略的資産配分

中央三井信託銀行 パッシブクオンツ運用部
チーフリサーチャー　大　森　孝　造
（日本証券アナリスト協会検定会員）

目　　次

戦略的資産配分は、一般的に株式や債券等の資産区分ごとの投資資金配分を定めるものであるが、債券についてはそれだけでは不十分である。というのは、一つには債券リターンの大部分はデュレーションによってとらえることができるため、配分比率だけでは決まらないデュレーションによるリスクとリターン調整について自由度があるからである。二つ目は、デュレーションがあらかじめ決まっている債券市場インデックスをベンチマークとする理由が希薄だからである。

したがって、資産配分と同時に債券デュレーションも併せて決定しなくてはならないが、本稿では、年金資金の ALM 問題についてその簡単なモデルを示した。ALM 問題を取り上げたのは、負債の金利変動リスクをヘッジするための手段として債券が位置付けられるためである。そして、最適ポートフォリオの振る舞いを説明し、賃金上昇による負債の成長やデュレーションで説明しきれないリスクの影響等を考察した。

ただし、望ましい債券デュレーションが得られたとしても、特定のデュレーションをパッシブに実現する運用をどのように行うのかについては依然課題である。それは、何らかのインデックスを目標にトラッキングエラーの最小化をもくろむ“インデクシング”とは異なったものであろう。

1. はじめに

戦略的資産配分は、長期的には社会的リスクに対して支払われると期待されるプレミアムを資産配分を通じて享受していこうとする手段であり、その具体的な表現がベンチマーク（ポートフォリオ）である。プレミアムの享受とは一

大森　孝造（おおもり　こうぞう）　1989年3月東京大学教養学部卒業、98年3月筑波大学院経営・政策科学研究科にて修士号（経営システム科学）取得。89年4月三井信託銀行（現中央三井信託銀行）入社、証券部投資研究室、受託資産運用部投資技術グループ等を経て、2000年10月から現職。著書に「パッシブ・コア戦略」（共著、東洋経済新報社、2001年）。

見受け身的なアプローチのようであるが、そこにはベンチマーク一何らかのインデックスであることが多い一が、自分の投資目的にとって好ましいリターンプロファイルを持っているという積極的な判断が成されているのである。

よって、重要となるのはベンチマークの適切性であるが、ここで大きな疑問は債券運用（のベンチマーク）に関するものである。株式については分離定理の下、市場ポートフォリオを保有することがかなり一般的な状況（仮定）で支持される。一方、債券の場合、市場ポートフォリオを保有することの根拠は疑わしい。

それは株式と異なって債券には満期があるからである。満期がある場合、投資家の投資期間によって安全資産と危険資産の位置付けが変わってしまう。このように一種の顧客効果が予想されるから、どの投資家にとっても最適な市場ポートフォリオの存在は疑わしくなってくるのである。にもかかわらず、多くの機関投資家は市場ポートフォリオ（に近いポートフォリオ）を保有している(注1)。

さて、企業年金運用ではこれまで専ら、資産のみのリターンプロファイルのみを見て投資判断を行っていた。それは、年金負債について明示的に変動を扱ってこなかったために、年金資産額の増減のみの関心で足りていたからである。しかし、日本でも2000年度の退職給付会計導入によって企業BSに年金資産と負債の差違が反映されるようになり、負債変動を無視し続けることはできなくなった。一般の企業経営においても負債の変動と投資収益のマッチングの重要性が論を待たないのと同様、年金資産管理においてもALMが意思決定のフレームワークとなるのである。

フレームワークが変わることで各資産の位置付けは変化するが、特にその変化が大きいのが債券である。運用目標である負債はさまざまなファクターによって変動するが、その中でも価格変動に大きな影響を持ち、測定も行いやすいのは金利変動のリスクである。債券は、この金利変動リスクの影響を最も被る資産であるため、ALMにおいては重要な役割を担うことになる。

ALM問題を考える際、株式等の資産は投資比率によってそのリスクおよび期待リターンの管理を行うが、債券についてはそれらとは異なった考え方が可能である。というのは、債券リターンの大部分はデュレーションによってとらえることができ、またその大幅な調整が個別証券リスクを大きく負担することなく可能であるために、投資比率決定とは別にデュレーションをいかにするかを考えることができるからである。最適性の視点から債券市場ポートフォリオを基準とした債券投資には疑問がある一方で、あらかじめリスク/リターン特性が与えられたインデックスに投資することが必ずしも必要ではないのである。

そこで、本稿では債券価格形成に立ち戻りながら、年金資金の戦略的資産配分において金利リスクエクスポージャー（デュレーション）がどのように決定されるか整理することを目的とする。具体的には、債券のベンチマークとして

（注1）　企業年金基金の運用では、NOMURA-BPIが債券ベンチマークのデファクトスタンダードになっている。

何が適切かを考えることになる。債券に関する教科書には必ずデュレーションあるいはコンベクシティーの概念が解説されるが、それらリスク概念と債券収益率とがいかなる関係を持つかに関する説明は、ほとんどないように思われる。本稿では、この基礎的な概念を使うことで、投資比率によるものとは異なるリスク管理が債券運用にとって重要であることを示す(注2)。

以下、次章では債券の市場ポートフォリオを保有することに疑問を呈し、3章ではデュレーションを用いて債券リターンのモデル化を検討する。4章ではALM問題を考え、最適デュレーションを明示的に解きその解の振る舞いを見る。5章では、現状のベンチマークやインフレの影響等のより現実的な問題を考察する。6章は結語である。

2．債券市場ポートフォリオの効率性

まず既存の債券インデックスへの疑問を整理しよう。以下のように、満期が異なった複数の投資家による市場、弾力的で見積もりが困難な証券の供給量、さらにインデックスのデュレーションの特性から、債券市場インデックスを規範ポートフォリオとしてベンチマークに据える根拠は希薄と言わざるを得ない。

2.1　均衡価格と市場ポートフォリオ

市場における証券価格形成のモデルでは、代表的な投資家を想定して、ある証券供給量の下での受給が一致する条件から解を導くような設定が多い。CAPMは正にそうした形をとっており、結果として市場ポートフォリオが効率的ポートフォリオであること、および市場ポートフォリオとの共分散によって各証券の価格付け（期待リターン算出）ができることを導いている。しかし債券市場においては、このような想定がし難いのである。

一つには先に述べたように、債券には満期があるからである。投資家の投資期間が異なれば、各自は投資期間に一致する満期の債券を保有する傾向を持つ。債券は満期まで保有する限りはリスクがないので(注3)、投資家の保有期間によって個別債券の評価が異なってしまうのである。したがって、債券市場では、一人の代表的投資家を想定し、その振る舞いから価格変動を導くことはできない。

そこで、均衡価格を導くモデルとしては、満期ごとに異なる投資家とその保有富から議論を始めることになるのであるが、そうした設定によっても需給が一致することから均衡解を求めることは困難である。

それは証券供給が柔軟に変化するからであり、市場ポートフォリオを疑問視する二つ目の要因でもある。債券は株式よりも容易に発行が可能である。例えば、ある年限に需要が集中してその満期の債券価格が上がれば（金利が下がれば）、資金の取り手はそこに合わせて債券を発行する。債券市場ポートフォリオとは、そうし

（注2）よき例外は、80年代後半に発表されたLeibowitzによる一連の論文とそれを取り巻く議論である。その集大成として、Leibowitz [11] を挙げておこう。

（注3）現実には信用リスクとクーポンの再投資リスクがあるが、債券の満期の影響に注目した議論を行うためにこれらは無視する。すなわち、割引き国債を想定しているということである。

た行動の結果である。そこでは、株式の場合のように広い分散投資を意識するのとは異なって、金利に関する割安/割高判断によって投資家/発行体の行動が律せられており、債券市場ポートフォリオとの関連を導くことは難しい。

近年、株式市場インデックスにおいて、安定株主の保有分や持ち合い分を調整する浮動株調整の議論が盛んである。これは上の議論における証券の供給量をさらに正確に見積もろうとする努力であるが、債券市場はこの視点からどのように考えられるだろうか。

債券市場では、発行時に購入して償還まで保有するという投資家の割合が非常に高い。そのため、“浮動”債券は国債の一部のように限られたものになってしまう。ベンチマークの適切性を考える際に、あるインデックスを効率的ポートフォリオとしてでなくアクティブ運用の平均値として消極的に認めようという論調もあるが、アクティブ投資の残高が見積もれないのであるから、このような立場も債券では取りにくい。現状の債券市場インデックスと真の債券供給量を表すポートフォリオの乖離がもたらす問題点は、発行済株式数すべてを投資可能として構成されている株式インデックスの問題に比べより深刻であろう。

2.2　デュレーションと金利の逆相関

Granito [7] は、債券市場インデックスのデュレーションが金利水準と逆相関（金利が高い時に短く、低い時に長い）を示すことをIndex Biasと称している。投資家が債券期待リターンに基づきデュレーションを調整しているのであれば、通常のリスク選好では金利が上がればデュレーションは長く、下がれば短くなるはずである。この視点から、Index Biasは投資家の期待に反していると指摘している。

Index Biasは実証的にも観察される現象であるが、発行体の行動もその要因であろう。低金利時には償還期限の長い資金の調達が増えることは自然に思われる。発行体のそうした行動が納得しやすいのものであるならば、今後もIndex Biasは構造的に生じるものであろう。よって、金利水準とデュレーションが逆相関を示す市場インデックスを、代表的投資家のリスク選好を表すものとして投資の基準にするのは無理があるように思われる。

3.　デュレーションに基づく債券価格形成モデル

先のとおり債券市場インデックスのベンチマークとしての規範性に疑問が多いとなると、替わる債券運用のベンチマークを模索しなくてはならない。その候補が、債券リスクの大部分をとらえることができる指標―デュレーションである。

債券の価格形成においては債券価格、あるいは利回りで議論が行われる場合が多いが、債券を含むポートフォリオを構築する場合には債券の収益率の方が適当である。収益率であれば株式ポートフォリオとの関係も明確になり、これまで蓄積されていたポートフォリオ理論の諸結果が有効に使えるからである。ところで債券の金利リスクからの影響はデュレーションによって計量化できることが知られているので、期待収益率とデュレーションとの両者がうまく関係づけられればより使い勝手のよい価格形成式が

導かれることになる。本章では、デュレーションに基づく価格形成を求めることにする(注4)。

3.1 利回りと収益率の関係

まず、投資期間または評価期間を n 期間として、債券のデュレーション D は期間 n よりも長いとしよう。すると、そのリターン $\tilde{R}_B$ は、Babcock [2] や Leibowitz [11]、Campbell et. al.[5] によれば、

$$\tilde{R}_B \approx Y + (1 - \frac{D}{n}) \Delta \tilde{Y} \tag{1}$$

との近似式が得られている(注5)。ここで Y は同債券の利回り、$\Delta\tilde{Y}$ は現在の利回りと n 期間後の利回りとの差である。現在においては $\Delta\tilde{Y}$ が確率変数であるので $\tilde{R}_B$ も確率変数である。利回り変化の収益率にもたらす影響は $1-\frac{D}{n}$ であって、投資期間とデュレーションが等しければ0つまりイミュナイゼーションとなる。

この関係を事後的なインデックスデータ(NOMURA-BPI)を用いて確かめると、図1のようになっている。リターンの差違は1%程度であり、収益率のモデルとしては十分な説明力を有していると思われる。

以下、分析の期間を単位期間とするので $n=1$ とし、この下で式(1)を変形すると、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_B &\approx E[\tilde{R}_B] + (1-D)(\Delta\tilde{Y} - E[\Delta\tilde{Y}]) \\ &\approx E[\tilde{R}_B] + (D-1)\tilde{\epsilon} \end{aligned} \tag{2}$$

となる ($E[\cdot]$ は期待値を表す)。ここで $E[\tilde{R}_B] = Y + (1-D)E[\Delta\tilde{Y}]$ で債券の期待収益率、$\tilde{\epsilon}$ は来期短期金利予測誤差にマイナスをつけたファクター（平均ゼロ）である。マイナスをつけるのは、短期金利上昇が債券価格を下落させるからである。また、利回り変化の予測誤差は、短期金利の予測誤差で近似できるとしている。

3.2 期待リターン

先の議論のように、債券ポートフォリオに関しては株式と異なって分離定理が働かず、すべての投資家が保有するような市場ポートフォリオは存在しない。したがって市場ポートフォリオを用いたCAPMのような価格形成はできないことになる(注6)。

一方で前節のとおり金利変化をファクターとするリターンのモデルが得られている。このファクターはすべての債券に広く影響するから

（注4） 本章と次章については、米澤＝大森 [15] も参照されたい。

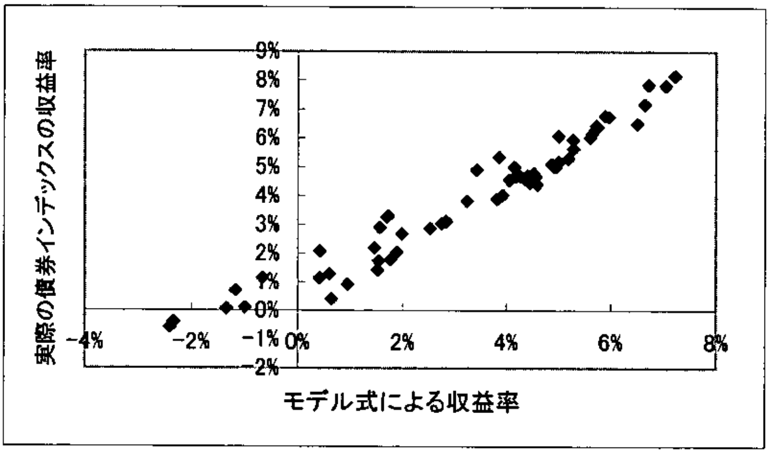
（注5） この近似式を満期 D の割引債で確かめておこう。すると、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_B &= ((1+Y+\Delta\tilde{Y})^{-(D-n)}(1+Y)^D)^{\frac{1}{n}} - 1 \\ &= (1+Y+\Delta\tilde{Y})^{1-\frac{D}{n}}(1+Y)^{\frac{D}{n}} - 1 \\ &\approx (1-\frac{D}{n})(Y+\Delta\tilde{Y}) + \frac{D}{n}Y = Y + (1-\frac{D}{n})\Delta\tilde{Y} \end{aligned}$$

となって、(1)と同じ式が得られる。

（注6） ただし、後述するように一つの金利ファクターによる価格付けによれば、形式的には市場ポートフォリオをリスクファクターとすることもできる。なお、Elton＝Gruber [6] では市場ポートフォリオ保有を前提に $E[\tilde{H}_i] = r + (E[\tilde{H}_m] - r)D_i/D_m$ との均衡式を導いているがその根拠は明らかでない。ここで $\tilde{H}_m$ は債券市場ポートフォリオ収益率、D_m はそのデュレーション、$\tilde{H}_i$ は債券 i の収益率、D_i はそのデュレーションである。

図1　債券リターンモデル



（注）対象はNOMURA-BPIの1年間収益率。データ期間は1996年1月から2001年11月まで。金利は国債価格から推定した7年イールドの月中平均を用いた。モデルによる説明力(R^2)は0.95、リターン差違の標準偏差は0.60%であった。

APTを適用することによって、

$$E[\tilde{R}_B]=r+(D-1)\delta \tag{3}$$

が得られる。ここでrは短期金利、δはリスクの価格である。δの値は、投資家の選好および証券の供給によって正負いずれもとり得るが、一般的には長期債ほど期待リターンが高いという正の値が想定されている。この式を再び式(2)に代入すれば、

$$\begin{aligned}\tilde{R}_B&=r+(D-1)(\delta+\tilde{\epsilon})\\&=r+(D-1)\tilde{\delta}\end{aligned} \tag{4}$$

となる（ここで$E[\tilde{\delta}]=\delta$である）。以下の章ではこの式が基本的な役割を果たす。なお、式が不必要に煩雑になることを避ける目的から以下では$(D-1)$をDで表すこともある。

4.　ALMへの応用

債券の収益率モデルが得られたので、年金資金の戦略的資産配分を考えていこう。ALM問題を解くことによって、望ましい資産配分と同時に最適なデュレーションについて議論することができる。その際、債券運用のベンチマークは望ましい金利リスクエクスポージャーつまりデュレーションとして考える。まず、運用目標としての負債とALMの枠組みから議論を始め、後半でALM問題の解を示す。

4.1　負債変動と運用目標

確定給付型年金の場合、掛金とその積立金の運用収益から負債の支払いが賄わなければならない。負債の計算方法は数種類あるが、ここでは新しい会計基準に依りPBO（予測給付債務）を考える。つまり、時価評価の考え方に即した、企業BSに反映される量である。PBOは将来の昇給を考慮した値であり、長期継続的な運用を考えるのに好適である。

PBOの一般的な計算式は、あい昧さを許して概略を示せば以下のようである。

$$\mathrm{PBO}=\sum_{i\in 現役}\sum_{t=1}^{定年まで} 脱退率(t)\times G_i(t) \times\frac{勤続年数_i}{勤続年数_i+t}\times(1+割引率)^{-t} + \sum_{i\in 退職済} 給付の現在価値_i \qquad (5)$$

ここで、iは個人、tは脱退(離職)時点、$G_i(t)$は脱退時に決まる給付額(の脱退時点価値)を表している。現役世代については、給付額のうち現在発生しているとみなした金額を将来にわたって時点ごとに離職する確率で加重平均したものを、対象者について合計している。さらに既に退職した従業員への給付の現在価値を加えて、PBOが算出される。

1年後のPBOの変化を考えると、まず予想されているものとして、勤続年数が伸びることによる増加(勤務費用)、割引率が1年分少なくなる分の増加（利息費用）があり、給付（キャッシュアウト）による減少がある。ただし、給付は計算に織り込まれているし、勤続年数の伸びによるものは本来掛金で補われるはずである。したがって、資産運用の目的となるのは、割引率＝金利による増加である。

次に予期しない変化について考える。負債を構成する要素のうち、勤続年数に対する給付額のカーブや脱退率・人員構成などは、個別企業ごとの事情が大きい。また資産市場との関連を議論することも難しい(注7)。よって、これらの変動をここでは扱わないことにすると、残るは割引率の変動である。給付額等が固定とすれば、負債は固定クーポンの債券と同じような構造を持っているから、その現在価値としての負債価値は割引率の変動リスクによって変動することになる。割引率が高まれば負債価値は低下し、割引率が低まれば負債価値は上昇する。そして負債価値の変動幅、すなわち収益率のリスクはデュレーションに従うことになる。以上より、負債変動のモデルとして、前章のモデルを用いることができるのである。

次にALMの考え方であるが、これは年金と母体企業の関係をどのようにとらえるかによって異なってくる。母体企業と年金を一体で考えた場合は、年金支払いの保証制度を考慮してそのプット価値を最大化する株100%戦略、一方で、母体企業は債券を発行しその資金で株式運用を行い年金基金は債券100%運用とする税裁定効果を最大化する戦略、さらには母体事業のビジネスサイクルまで考慮しようというもの等さまざまな議論がなされている(注8)。

ただし、ここではサープラスに注目した議論といたしたい。母体企業と年金を一体として取り扱うと、積立ポリシーや税金、そもそもの年金債務の位置付け等考慮すべきファクターが増えることから問題がより複雑となるためである。株式市場リスクや金利リスクと資産配分の関係について、まず単純な設定で議論することは決して益の少ないことではあるまい。意思決定の枠組みについても、解析的扱いが容易であることを優先し、Sharpe＝Tint[13]等の先行研究に倣ったサープラス平均分散最適化とする。

4.2　ALMの基本モデル

前節までの議論により準備は整ったので、こ

(注7)　ただし、インフレ等に伴う賃金上昇については、後の章で考える。
(注8)　Logue＝Rader［12］が幅広い議論を紹介している。

こでは最適化問題を解いて、最適な資産配分とデュレーションを考えていこう。まず、設定は基本的なものにとどめ、次章で若干の拡張を行う。

負債である企業年金債務のデュレーションは、式(5)から求まるが、将来給付はALM直接の操作の範囲ではない年金制度設計によって決まるので以下では所与とする。資産としては株式と債券の2種とする。債券は任意のデュレーションのものに投資できるとする。式(4)を用いて株式、債券、負債それぞれの1期間リターンを、

$$\tilde{R}_S = r + \tilde{H}_s \tag{6}$$

$$\tilde{R}_B = r + D\tilde{\delta} \tag{7}$$

$$\tilde{R}_L = r + \beta\tilde{\delta} \tag{8}$$

とモデル化する。ここでD, βは、それぞれ債券、負債のデュレーションから1を引いたものである。rは短期金利、$\tilde{H}_s$は株式収益率の変動を表すファクターで平均H_s、分散σ_s^2とする。$\tilde{\delta}$は前節で導入した“金利ファクター”であり平均δ、分散σ^2である。両確率変数間の共分散は$\mathrm{Cov}(\tilde{H}_s, \tilde{\delta}) = \alpha\sigma^2$とする。$\alpha$は、株式収益率の金利感応度すなわち株式のデュレーションから1を引いたものである。

積立比率（資産/負債）の逆数を$K(\leq 1)$とすると(注9)、ポートフォリオをx=(株式、債券、負債)$'$=$(x_1, 1-x_1, -K)'$、リスク回避度をλとして最適化問題は、

$$\underset{x_1, D}{\text{maximize}} \quad \nu' x - \frac{\lambda}{2} x' Q x, \tag{9}$$

ただし，$\nu = \begin{pmatrix} r + H_s \\ r + D\delta \\ r + \beta\delta \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \alpha D\sigma^2 & \alpha\beta\sigma^2 \\ \alpha D\sigma^2 & D^2\sigma^2 & \beta D\sigma^2 \\ \alpha\beta\sigma^2 & \beta D\sigma^2 & \beta^2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

となる。すなわち、年金基金は資産配分と債券デュレーションを調整してリスク調整後サープラスリターンを最大化するのである。これまでも債券を含めたポートフォリオ最適化問題は基本ポートフォリオ策定問題として検討されてきたが、それは専ら株式ポートフォリオとデュレーションの決まった債券市場ポートフォリオの2資産（あるいは安全資産を含めた3資産）に関する最適化であった。Leibowitz [11] にはポートフォリオの最適デュレーションに関する考察が見られるが、債券の期待リターンとデュレーションの関係までは踏み込んでいない。それらに対して問題(9)は、ポートフォリオ全体のリスク/リターンの視点からデュレーションのコントロールを含んだ点が特徴である。

式(9)を解くと、最適な株式比率および債券デュレーション（Dの最適値＋1）は、

$$x_1^* = \frac{H_s - \alpha\delta}{\lambda(\sigma_S^2 - \alpha^2\sigma^2)} \tag{10}$$

$$D^* = \frac{\lambda\sigma^2(\sigma_S^2 - \alpha^2\sigma^2)\beta K - \alpha\sigma^2 H_s + \sigma_S^2\delta}{\sigma^2(\lambda(\sigma_S^2 - \alpha^2\sigma^2) - H_s + \alpha\delta)} + 1 \tag{11}$$

となる（解法についてはAppendix参照）。この時、ポートフォリオ全体のデュレーション（金

（注9）　このようにサープラスの管理を目的とするALMの問題点は、$K>1$（積立不足）の場合が取り扱えないことである。現在のように積立不足が散見される場合には注意が必要である。なお、負債側を全く考慮する必要の無い場合には、$K=0$とおき最適化すればよい。

利感応度）は、

$$D_p = D^*(1-x_1^*)+(\alpha+1)x_1^*$$
$$=\beta K+1+\frac{\delta}{\lambda\sigma^2} \qquad (12)$$

となっている(注10)。

これらの結果からは以下のようなことが分かる。

- 株式比率に負債のデュレーションは関係ない。株式比率は、株式の期待リターン/リスクのうち金利ファクターで説明できる部分を控除した株式独自の期待リターン/リスクに基づく魅力度によって定まる。
- 一方で、ポートフォリオ全体としてのデュレーションも株式に関係なく定まる。負債のデュレーションを基準として、すなわちイミュナイゼーションを基準として、金利ファクターの魅力度に対応してリスクを負担するように決定される。
- 債券のデュレーションは、ポートフォリオ全体として前項の状態が達成されるように調整される。
- リスク回避度が非常に大きい場合、すなわち $\lambda\rightarrow\infty$ で、株式比率は0に、債券デュレーションは $\beta K+1$ に収束する。これはイミュナイゼーションである。
- 余剰が少なくなって K が1に近づくことの効果は、負債のデュレーションが伸びることと同じである。リスク要素としては βK であって各々ではないのである。
- 株式の変動と金利の変動が独立（$\alpha=0$）である場合には、債券デュレーションは、

$$D^*=\frac{\lambda\sigma_S^2\sigma^2\beta K+\sigma_S^2\delta}{\lambda\sigma_S^2\sigma^2-\sigma^2 H_s}+1 \qquad (13)$$

  となる。金利ファクター・株式共にリスクプレミアムが大きいほどデュレーションが長くなる。
- さらに金利ファクターにプレミアムが無い時（$\delta=0$）には、デュレーションの式よりそのリスク（σ）は消える。つまり、意思決定に金利リスクの大きさは関係ない。その時のデュレーションは、ポートフォリオ全体としてイミュナイゼーションとなるように調整されている。

これらについて、具体的数値によってイメージを得ることにしよう。さまざまな設定で最適株式比率とデュレーションを計算した結果が、表1である。

株式の期待リターンが上昇すると（Case1,2）、株式比率は上昇するものの債券デュレーションが調節されてポートフォリオ全体としてのデュレーションは変化がないことが分かる。次に負債デュレーションが変わって（Case2-4）も株式比率が変わらないことが分かる。金利プレミアムが無ければ（Case5）、ポートフォリオ全体のデュレーションが $\beta K+1$ となっている（イミュナイゼーション）。Case6-7からは、株式デュレーションが長い時(注11)には株式比率に応じて債券デュレーションが短くなることが分か

(注10)　サープラスリターンを株式エクスポージャーと金利ファクターエクスポージャーで記述し最適化を行えば、より容易に式(10)(12)は得られる（5.3節、Appendix B を参照）。ただしここでは、資産配分問題との関連が理解しにくくなるため今回のような定式化を採った。

(注11)　市場データから観測される株式デュレーションは小さいが、株式評価価格として市場価格でなく割引配当モデルを用いると一般に株式デュレーションは非常に長くなる（Bostock et al. [4]）。

表1　最適ポートフォリオ

	H_s	δ	α	β	x_1^*	D^*	D_p
Case1	2%	0.1%	1	15	9.5%	16.37	15.00
Case2	5%	0.1%	1	15	24.6%	19.23	15.00
Case3	5%	0.1%	1	10	24.6%	13.93	11.00
Case4	5%	0.1%	1	18	24.6%	22.41	17.40
Case5	5%	0.0%	1	15	25.1%	16.68	13.00
Case6	2%	0.1%	16	15	5.6%	14.88	15.00
Case7	7%	0.1%	16	15	75.0%	9.00	15.00
Case8	5%	0.08%	1	15	24.7%	18.72	14.60

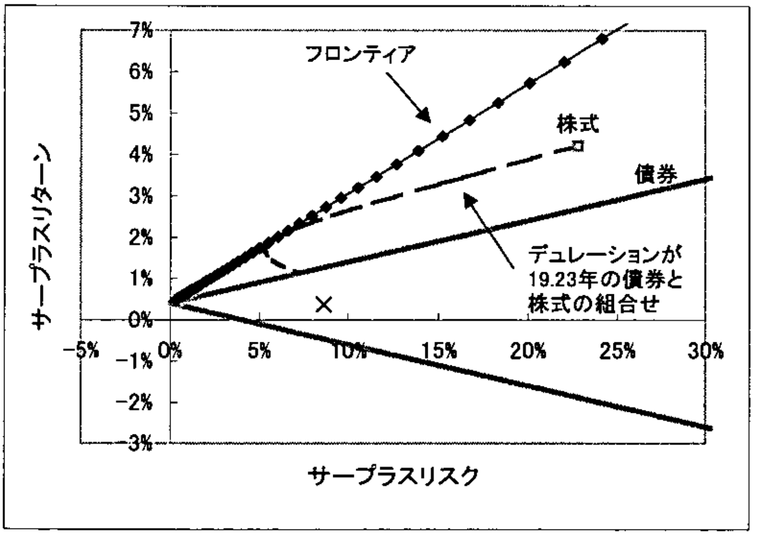
（注）その他のパラメータは、$\sigma_s=20\%$、$\sigma=1\%$、K=0.8、$\lambda=5$とした。

る。これは、株式が債券の金利変動に対するヘッジ資産としての役割を代替しているからである。ただし、この時もポートフォリオ全体のデュレーションは一定である。

図2は、Case2のサープラスリスク/リターンに関するフロンティアを表している。債券はデュレーションによって特性が変わるので、折れ線で示されている。デュレーション19.23年の債券と株式の組み合わせを表す曲線がフロンティアに接する点が、Case2の最適ポートフォリオである。フロンティアの左端は、イミュナイゼーション戦略である。

なお、最適デュレーションのモデル式(11)(12)はいずれも“リスクファクター感応度の関数＋1”

図2　サープラスに関する効率的フロンティア



（注）リスク/リターンの数値は資産額を1としたもの。パラメータの値は表1のCase2の設定とし、$r=2\%$とした。‘×’は、デュレーションを5.5年に固定した債券と株式による最適ポートフォリオを表している。

との形をとっているが、これは1期間リターンの感応度を“デュレーション−1”とモデル化したためであり、n 期間リターンの場合も適宜変更すればよい。さらに、金利ファクター以外でも、債務が何らかのリスクファクターによって変動する場合、同じファクターによって変動し、かつそのエクスポージャーを自由に調整できる投資資産がある時には、その最適なエクスポージャーについても同様の結果を導くことができる。

5. 実務的議論への示唆

以上の基本モデルに基づき、ここでは、債券運用に関する幾つかの話題について考える。まず、現実の債券ベンチマークのデュレーションが、ALMモデルの示唆よりも大幅に短い点について考察する。続いて、イミュナイゼーション戦略の反論として必ず言及されるインフレや労働生産性の向上による賃金上昇率の影響、また、海外資産について考える。最後に、金利ファクターでとらえきれない債券・負債それぞれの固有リスクが戦略的資産配分に与える効果について触れておく。

5.1 デュレーションの短期化をもたらすもの

現状多くの年金基金で用いられているベンチマークのデュレーションは、約5.5年と先のモデルの解より大幅に短い。図2には債券デュレーションを5.5年に固定した場合の最適ポートフォリオも書き入れたが、大きく効率的フロンティアの内側に入ってしまっていることが分かる。そこでここではその要因として、取引コスト、負債評価金利のボラティリティーが小さいことを考察する。しかしここで挙げた要因では説明できず、ALMの観点からは短いデュレーションが是認されないことが分かった(注12)。

5.1.1 超長期債の取引コスト

前章で示したようにデュレーションが十数年になる債券ポートフォリオを作ろうとすれば、現実的には20,30年国債への投資が必要になる。超長期債への投資を検討する際その障害として度々言及されるものに、流動性の低さからくる取引コストの問題がある。表2は最近の国債マーケットの様子である。確かに超長期国債

表2　最近の国債市場の概要

	発行周期	1回の発行額	デュレーション	取引コスト
10年国債	毎月	約1.7兆円	約9年	1bp
20年国債	年6回	約0.5兆円	約16年	1.5bp
30年国債	年2～3回	約0.3兆円	約21年	2bp

(注)　発行額等は市場公募分で2001年後半の様子を表している。取引コストは、単利のオファービッド差であり単位はベーシスポイント。ただし、取引データによるものではなく証券会社より聴取した数値であり、おおよその目安である。

(注12)　現状の低金利下では、将来の債券や負債のリターン分布は左にひずんでいる（大きな成長はない）ため、デュレーションは短くするべきであるとの指摘もできよう。もちろん、個別基金の戦術的視点としては検討する価値のある意見だが、ここでは戦略的資産配分を論じているので取り上げない。

(20,30年) は長期国債 (10年) に比べ、発行額は小さく取引コストも大きい。では、その影響はどの程度であろうか。

表２によれば30年国債の場合デュレーションは21年であるから、価格差に直すと、取引コストは約42ベーシスポイントである。例えば投資期間１年で購入と売却を行ったとすると、合計でこれだけのコスト (損) が生じるわけである。ここでみたようにコストは利回り表示であるから、デュレーションとおおよそ比例していると見なすことができ、本稿のモデルにそのまま取り入れることができる。すなわち、超長期国債については δ が0.02%低いとするのである。もちろん、コストの絶対額の大きさと同時にコストの非線型性 (長期国債であれば δ は0.01%低下するのみ) も考慮すべきであるが、比例すると見なしてもメドにはなる。

表１のCase8には、δ を0.02%低くした場合の結果を載せた。Case2と比べると債券デュレーションは約0.5年小さくなるものの、依然20年近い値で大きな変化はない。さらにここでは、コストを１年で償却する形でモデルに取り入れたが、実際の債券ポートフォリオの１銘柄当たりの投資期間はより長く、取引コストの影響はより軽微となるはずである。したがって、明示的に見積もれる取引コストは、デュレーションを大幅に短くするほどの影響を持たないといえる。

ただし、ここでの試算はどんな取引量でもそれが可能とした上でのものであった。例えば、超長期国債１銘柄当たり数億円程度 (ファンド規模で1,000億円程度) であれば、ほとんど問題とならないだろう。しかし、もし多くの年金基金がデュレーションを長くしようとして購入に動いたらどうなるであろうか。

超長期国債の供給量は、**表**２でみるように長期国債に比べ大幅に少ない。よって、供給が逼迫して価格上昇が起きる可能性はある。ただし、その際投資家は無リスク資産に近い位置付けで超長期債に投資しているのであるから、金利の低下は一概に悪いことではないだろう。一方で国も含め超長期の (実物資産) 投資を行っている発行体は、債券の供給を増やすであろう。金利は、超長期資金市場における運用/調達バランスをより適切に反映させることになるのであって、年金資金の行動によって生じる超長期債の逼迫も過渡的な問題に過ぎないかもしれない。

5.1.2　負債評価金利のボラティリティー

負債を評価する際に将来のキャッシュフローを割引く金利は、実は市場金利ではない。企業会計審議会の意見書には「一定期間の債券の利回りの変動を考慮して決定することができる」とあり、日本公認会計士協会の「退職給付会計に関する実務指針」にも「…過去の一定期間の利回りの変動を考慮して補正を行うことができる…」とある。このように適用する金利には母体企業の裁量が認められている。実務的には長期国債利回りの５年平均が一つの参考指標となっているようであり、現状では1.5〜3.5%程度と幅広い。

利回りの移動平均が基準であれば、これは金利のボラティリティーが減少したことに等しい。単純に金利の変動が各年独立だとすれば、５年平均をとることでボラティリティーは半分弱 ($1/\sqrt{5}$) となる。このことを債務のモデルで表現するには、金利プレミアムは別途調整す

ることにすると、デュレーションを対応して半分弱にすればよい。これは例えば、金利が下降して債務キャッシュフローの時価が増えても、適用する割引率は金利の低下分を一部しか反映しないから負債評価額は膨らまないというわけである。

ALM問題の解としては、債券デュレーションが大幅に短くなるであろう。負債が変動しにくくなるので、退職給付会計の導入以前に近い結果になるのである。

ただし、この評価金利の変動が小さいことをもって、資産ポートフォリオの短いデュレーションを肯定するのは慎重でなければならない。というのは、モデルの形にそって説明すれば、金利ボラティリティーが減少したとしても将来の評価金利の予測値が変化しているからである。

上の金利低下の例では、市場金利が評価金利より低いのであるから、市場金利が再び上昇するとの納得性の高い見通しが特になければ、評価金利が将来低下する可能性が強い。つまり評価金利に下降トレンドが生じていることになる。この場合、(負債が実際は評価より大きいので) 生じている含み損はいずれ顕在化する可能性が大きいということになり、健全性の視点からは問題があるといえる。もちろん、真の負債時価は不明であるし、どんな会計制度を採ったとしても評価額に誤差は含まれている。しかし、その誤差の期待値は0であるべきであろう。

5.2　賃金ベースアップによる負債の増加

以上は、債券や負債のリターンについて、金利変動に伴う変化に注目した議論を行った。同様な視点から特に短期的なサープラスの変動に注目した議論は、Leibowitz [8,9,10] をはじめとして行われてきた。しかし常にこれらに対しては、長期的な賃金上昇の影響を指摘する議論もあった（Ambachtsheer[1], Bookstaber＝Gold[3] 等)。

Ambachtsheer[1]等が注目するのは、インフレと生産性の向上に伴う負債成長である。そして、株式(不動産や未公開株を含む場合もある)投資は、短期的にはリスクが大きいが、長期的に資産が負債を下回るリスクを減らすためには魅力が高いとしているのである。

ここでは、このように大きな関心が持たれている賃金上昇の影響について考える。もちろん、実際にはインフレ等と給付額の関係は、年金制度や労使交渉の結果によるのであって1対1の明確な関係は必ずしもないが、例えばインフレによる年金給付の実質減少が全く放置されることもないであろう。

まず、インフレと生産性向上による成長のうち期待されている部分についてであるが、問題となるのはその織り込まれ方である。債券については、“金利＝期待インフレ＋実質経済成長”と考えればインフレ等の収益はキャッシュフローに織り込まれているといえる。株式についても、投資家が実質ベースで将来キャッシュフローを予測し評価しているとすれば、期待されているインフレ等は織り込まれいる。

一方で、負債については十分ではないと思われる。日本の現状のPBO計算では、現在の賃金テーブルを基に計算されている場合が多い(注13)。すなわち、負債は金利による成長以上に、インフレ等に伴いキャッシュフローそのものが増加することによって成長することにな

る。

ただし、これは最適ポートフォリオには大きな影響は与えない。負債の成長率が高くなっても、影響するのは株式と金利ファクターのリスクプレミアムだからである。それはあたかも、短期金利が低下して全体のリターン水準が下がったような状態である。

大きな変化が現れるのは、期待されていなかったインフレや実質成長の影響を考えた時である。まず一般的な債券はインフレに対してキャッシュフローは固定であり、インフレ変化等への感応度はない。債券ポートフォリオでは、借り換えによってある程度感応するが小さい値にとどまるであろう。株式は実質で評価されるから、期待されていないインフレ等にも対応して成長を示すとしてよいであろう(注14)。

さて負債であるが、インフレ等による期待賃金上昇率の変化への感応度は、デュレーションと符号が逆で大きさは近い値のものになると思われる。例えば、給付額とインフレが連動しているとすると、インフレ率１％の上昇は10年後の給付額としては10％以上の上昇となる。これは長期のものほど影響が大きい。既に脱退して確定した給付に関してはインフレ等の影響はごく少ないと見られるが、負債全体ではおおよそ平均満期であるデュレーションに近いのではないだろうか。

すると、金利と賃金上昇率の相関が高いことを勘案すれば、負債の実効的なデュレーションは短くなる。例えば、金利が上昇すると負債が減ったように見えるが、同時にインフレ率等も上昇しており、その分将来の負債キャッシュフローが増えているのである。

これらを今回のモデル式(9)で考えると、“賃金上昇率ファクター”によって株式と負債の共分散は大きくなり、負債の実効的金利変動リスクは小さくなる。よって、株式が負債の賃金上昇リスクのヘッジ資産として魅力が増し、一方で債券はデュレーションを減らす。債券にとってはいずれも逆風である。

5.3　外国資産

これまで、投資する資産は株式と債券の２種であり､国内/外国の区別を明示してはこなかった。ここではそれらの区別を導入して、より実際のポートフォリオ問題に近づけよう。

設定としては、議論の見通しをよくするため以下のとおりとする。まず、為替はフルヘッジを基準とし、通貨は資産とは独立に管理する、すなわち外貨エクスポージャーが必要であればヘッジを外したり為替先物(または先渡し契約)を買い立てたりすることとする。外国株式については、その変動が日本を除く一つの海外株式市場ファクターによって記述できるとしよう。外国債券については、世界各通貨の金利変動によるがここでは“世界通貨バスケット”を考えてその金利変動を表すファクター一つに債券リ

(注13)　日本公認会計士協会「退職給付会計に関する実務指針」には「…将来における給与水準の変動は、確実かつ合理的に推定できる場合以外は予定昇給率に含めない。…」とあり、現状ではインフレ等に伴う賃金上昇は見込まれていないケースがほとんどである。ただし、インフレが恒常的に起きている経済状況になれば、織り込むべきとも解釈できる。

(注14)　株式のインフレヘッジ機能等については議論の多いところであり、見積もりと判断には、本来、超長期のデータに基づく推定や負債・マクロ経済の構造的分析が必要である。

ターンの変動を集約してとらえる。外貨についても、本来は通貨それぞれにリスク/リターンの見通しがあるべきであるが、これも通貨バスケットの変動ファクターを考える。

それぞれのリターン変動モデルであるが、外国株式については海外株式市場ファクターそのものによって定まるとする。一方で、外国債券と外貨のリスクやリターンは、その金利/通貨ファクターエクスポージャーに比例するとしよう。すなわち、国内債券リターンの(7)式や負債リターンの(8)式と同様のモデル化である。

ここでは空売り制約を付けないで考える。すると、外国債券は長期/短期債の組み合わせでデュレーションの調節が可能となる。外貨については先物売買を自由に認めることにする。すなわち、内外債券と外貨は、その投資割合にかかわらずそのファクターエクスポージャーを任意に調整可能なのである。最適化問題は、式(9)に資産が三つ追加されるが、投資比率とエクスポージャーが一致する通常の資産は二つ（内外株式）である。他の三つの資産（内外債券と通貨）は投資比率に関係なくリスクエクスポージャーを決められることが、特徴的なのである。

この最適化問題の解を示すにはさらに多くの記号を導入した複雑な説明が必要になるので、ここでは内外株式が内外の金利変動と相関がないとした場合について、これまでの議論から予想される結果を述べることにする。株式変動と金利の相関は時期やデータサイクルによって変化するため、無相関の想定は全く現実離れしたものでないと思われる。一方で、内外の債券や外貨は各国通貨の金利変動にある程度の類似性が見られるため、共分散も考慮して一体で議論する必要がある。

さて、そのような設定の下では、Appendix に示すように最適化問題が内外株式と金利関連部分（内外債券、外貨、負債）に分離できる。まず内外株式についてであるが、これらの投資比率は通常の資産配分問題と同様である。すなわち、それぞれ独自の魅力度一内外株式間の相関によって説明できる部分をそれぞれのリスクプレミアムおよびリスクから控除して比をとったもの一を基準にして配分が決まる。

金利関連資産についても、外国債券と通貨のプレミアムの有無が重要となる。例えば、外国債券の金利リスクプレミアム（(7)式のモデルの δ に当たるもの）が国内金利との相関を考えても国内のものより大きければ、外国債券を保有してデュレーションも延ばすことになる。外貨についても、国内短期金利よりリターンが高いと見込まれれば、そのリスクも勘案した下でエクスポージャーを採る。いずれも、金利間の相関によって海外資産導入以前の状態から国内債券デュレーションが調整される。ただし、金利が完全に相関していないため両者共に負債の金利変動リスクヘッジ機能が国内債券よりも劣るし、国内債券のリスクプレミアムを十分優越するプレミアムが望めるかどうかも議論の多いところである。したがって、外国債券や通貨のリスクエクスポージャーは、国内債券のそれとは異なり、採ったとしてもごく少量にとどまるものと思われる。

以上の議論を個別基金の問題としてみると、通常制約が追加される。まず債券の空売りは難しいからデュレーションの調整幅が狭まるし、株式投資比率との関連も生じるので問題を分割

表3　固有リスクの影響

	$\sqrt{e}$	$\sqrt{f}$	x_1^*	D^*	D_p
Case1	2%	0%	25.3%	19.41	15.00
Case2	5%	0%	29.0%	20.31	15.00
Case3	10%	0%	39.7%	23.55	15.00
Case4	2%	10%	25.3%	19.41	15.00

（注）その他のパラメータは、$\delta=0.1\%$、$H_s=5.0\%$、$\alpha=1$、$\beta=15$、$\sigma_s=20\%$、$\sigma=1\%$、$K=0.8$、$\lambda=5$とした。

して考えることはできない。また、外貨も通常は海外資産の投資比率が上限であるので、ここでも外貨エクスポージャーと資産配分が関係する。いずれの要請も数値解析を用いて解くことは容易であるが、ここでは一般的な戦略的資産配分について示唆を得るために単純な設定とした。

5.4　固有リスク

負債も資産も実際には金利やインフレ等のファクターだけで説明しきれるはずはなく、それぞれ固有のリスクを持つ。これまでの議論では固有リスクを無視してきたので、単純すぎる懸念が残っている。そこで、固有リスクの影響を確認しておく。

固有リスクはファクターの変動と関連のないリスクであるから、式(9)にてそれを考慮すると、共分散行列が、

$$Q=\begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \alpha D\sigma^2 & \alpha\beta\sigma^2 \\ \alpha D\sigma^2 & D^2\sigma^2+e & \beta D\sigma^2 \\ \alpha\beta\sigma^2 & \beta D\sigma^2 & \beta^2\sigma^2+f \end{pmatrix} \tag{14}$$

と変更される。$e,f(\geq 0)$が、それぞれ債券および負債の固有リスクである(注15)。このような変更によっても解析解は得られるが（Appendix参照)、表現が複雑なためここでは最適解の振る舞いのみを示すこととする。

表3がその結果である。まずCase1-3および表1のCase2を比べると、債券の固有リスクeが大きいと株式比率が大きくなることが分かる。これは債券にリターンやヘッジ需要と関係のないリスクが増えたことによって、相対的に株式の魅力が高まったためと考えられる。ただし、3章でみたように債券のデュレーションで説明できないリスクはせいぜい数%であるので、大きな影響は及ぼさないと思われる。

また、Case1と4を比べると、負債の固有リスクは影響がないことが分かる。式(5)から類推できるように、負債は受給者の変化や中途退職等の制御が困難な要因による大きな固有のリスクを持つと考えられるが、資産配分にはそれらを考慮する必要がないのである。ただし、それは

（注15）債券の固有リスクをこのように定数としてモデル化すると、債券リスクのうち金利ファクターで説明できる部分がデュレーションが長くなるほど大きくなって、リスク管理上有利になる。本稿は最適デュレーションに注目しているから、このようなバイアスは好ましくない。これを解決するために、例えば債券リスクをと$D^2\sigma^2(1+e)$とモデル化することも考えられる。ただし、本稿の設定ではバイアスが小さいこと、後者のモデルでは長期債のリスクが非常に大きくなることから、固有リスクを定数とした。実務的判断は実証分析にゆだねられよう。

資産運用によってヘッジできないリスクだということであって、管理しなくてよいというわけではない。

6．結　語

戦略的資産配分は、一般的に株式や債券等の資産区分ごとの配分を定めるものであるが、債券についてはそれだけでは不十分である。というのは、債券のリスク/リターンは大部分デュレーションによってとらえることができるため、配分比率とは別にデュレーションによるリスクとリターン調整の自由度があるからである。これが株式等の一般的なリスク資産と異なる点である。さらに、デュレーションがあらかじめ決まっている債券市場インデックスを保有する理由が希薄ということもある。

したがって、債券については配分比率と同時にデュレーションも決定しなくてはならない。本稿では、一般的な平均分散分析に債券デュレーションの次元を加えて戦略的資産配分モデルを構築し、年金資金のALM問題に適用した。ALM問題を取り上げたのは、負債の金利変動リスクをヘッジするための手段として債券が有用ということがある。そして、最適ポートフォリオの振る舞いを説明し、現状採用されている債券ベンチマークの短いデュレーションの問題や賃金上昇による負債の成長、固有リスクの影響等を考えた。

このように、本稿では債券リスクの管理指標としてデュレーションを取り上げているが、実際の運用までは実務家として考えねばならない課題は多い。それは一つには、現実にデュレーションという資産はないということである。

戦略的資産配分におけるふさわしいデュレーションが求まったとしても、それを実現するパッシブ運用とはどのようなものであるのか、考え方を整理しなくてはならない。例えば、デュレーションを特定して他のリスクを最小とするポートフォリオは当該年限の割引債100%となってしまうが、この結論は受け入れられないだろう。理想的なパッシブ運用とは、金利水準の変動を受け身に（パッシブに）受け入れるポートフォリオである。この運用は、何らかのインデックスを目標にトラッキングエラーの最小化をもくろむ“インデクシング”とは異なったもののはずである。

ここで、もしより詳しい負債の情報があればより多くの検討が可能である。デュレーション以外に運用の基準がないのは、運用目標である負債の情報をデュレーションに集約してしまったためであるから、より適したパッシブ運用を考えるためには負債情報の拡大というアプローチがある。具体的には、インフレや賃金上昇に対する感度、高次デュレーションを考慮した負債モデルの拡張が挙げられよう。一方で、信用リスク等の金利リスク以外への債券リターンモデルを拡充することも考えられる。

また、現状年金基金の積立は負債を下回る($K>1$)ことが少なくない。サープラスが負の領域で意思決定を行う際に、通常のリスク回避的な設定で十分といえるだろうか。現実的に納得できる解を得るには、効用関数やフレームワークそのものについてのさらなる工夫が必要である。

今回は、戦略的資産配分に関してパッシブ運

用を前提に考えたが、アクティブ運用の評価も当然変わってくる。特に債券について、収益率のリスク/リターン関係を明らかにした上でベンチマークを設定しなくては、アクティブ運用がより多くのリスクを採っているだけになりかねない。

A　最適株式比率とデュレーションの導出

債券デュレーションを直接決定変数にすると、資産配分問題との関連を考えにくくなる。そこで、長期債/短期債を導入し一般的な資産配分に関する2次計画問題とすれば扱いが容易になる。長期債と短期債の比率によってデュレーションが定まるので、空売り制約が無い下では株/債券比率とデュレーションを同時に最適化することができるのである。

長期債と短期債の1期間収益率を、それぞれのデュレーションから1引いたものを L,S として、

$$r+L\tilde{\delta},\ r+S\tilde{\delta}, \tag{15}$$

とモデル化する。

ポートフォリオ x を(株式、長期債、短期債、負債)$'=(x_1,x_2,x_3,-K)'$ とすれば、最適化問題は、

$$\text{maximize}\quad \mu' x-\frac{\lambda}{2}x' Qx, \tag{16}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{i=1}^{3} x_i=1,$$

となる。期待リターンベクトルと共分散行列は、

$$\mu=\begin{pmatrix} r+H_s \\ r+L\delta \\ r+S\delta \\ r+\beta\delta \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$Q=\begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \alpha L\sigma^2 & \alpha S\sigma^2 & \alpha\beta\sigma^2 \\ \alpha L\sigma^2 & L^2\sigma^2 & LS\sigma^2 & L\beta\sigma^2 \\ \alpha S\sigma^2 & LS\sigma^2 & S^2\sigma^2 & S\beta\sigma^2 \\ \alpha\beta\sigma^2 & L\beta\sigma^2 & S\beta\sigma^2 & \beta^2\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

である。

さて、制約条件と積立比率の情報を、

$$x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -K \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$=t+T\hat{x}, \tag{19}$$

と表して目的関数を、

$$\mu'(t+T\hat{x})-\frac{\lambda}{2}(t+T\hat{x})'Q(t+T\hat{x})$$
$$=(\mu-\lambda Qt)'T\hat{x}-\frac{\lambda}{2}\hat{x}'T'QT\hat{x}+\text{定数}, \tag{20}$$

と書き換える。今回の設定では、

$$T'(\mu-\lambda Qt)=\hat{\mu}$$
$$=\begin{pmatrix} H_s-S\delta-\lambda(\alpha-S)(S-\beta K)\sigma^2 \\ (L-S)(\delta-\lambda(S-\beta K)\sigma^2) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$T'QT=\hat{Q}$$
$$=\begin{pmatrix} \sigma_S^2+S^2\sigma^2-2\alpha S\sigma^2 & (L-S)(\alpha-S)\sigma^2 \\ (L-S)(\alpha-S)\sigma^2 & (L-S)^2\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

と変換できて最適解は、

$$\hat{x}^*=\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda}\hat{Q}^{-1}\hat{\mu}$$
$$=\begin{pmatrix} \dfrac{H_s-\alpha\delta}{\lambda(\sigma_S^2-\alpha^2\sigma^2)} \\ \dfrac{(S-\alpha)\sigma^2 H_s+(\sigma_S^2-\alpha S\sigma^2)\delta}{\lambda(L-S)\sigma^2(\sigma_S^2-\alpha^2\sigma^2)}+\dfrac{\beta K-S}{L-S} \end{pmatrix} \tag{23}$$

と求まる(注16)。この時デュレーションは、

$$D^* = \frac{Lx_2^* + S(1 - x_1^* - x_2^*)}{1 - x_1^*} + 1$$

$$= \frac{\lambda\sigma^2(\sigma_S^2 - \alpha^2\sigma^2)\beta K - \alpha\sigma^2 H_s + \sigma_S^2\delta}{\sigma^2(\lambda(\sigma_S^2 - \alpha^2\sigma^2) - H_s + \alpha\delta)} + 1 \qquad (24)$$

となる。ここで、最適デュレーション(24)に長/短期債の属性(L, S)や短期金利は含まれていないことから、本件の定式化は、デュレーションを独立に制御していることと同値であることが確かめられる。なお、株式と金利の変動に相関がない、すなわち$\alpha = 0$とすると、

$$\hat{x}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{H_s}{\lambda\sigma_S^2} \\ \dfrac{S\sigma^2 H_s + \sigma_S^2(\delta + \lambda(\beta K - S)\sigma^2)}{\lambda(L - S)\sigma^2\sigma_S^2} \end{pmatrix} \qquad (25)$$

$$D^* = \frac{\sigma_S^2(\lambda\sigma^2\beta K + \delta)}{\sigma^2(\lambda\sigma_S^2 - H_s)} + 1 \qquad (26)$$

と簡潔になる。

B　最適化問題の分割

ポートフォリオベクトルを$y =$(国内株式、外国株式、国内債券、外国債券、外貨、負債)$'$として、さらに内外株式とその他の金利関連資産4種(負債を含む)に$y = (y_1', y_2')'$と分けて表現する。ここでyの各要素は、リスクファクターへのエクスポージャーを表しているとし、空売り制約がない下では自由な調整が可能である。また短期金利による収益は、正味の投資量に依存しているもので、ここでは固定$((1-K)r)$されており、リスクファクターとも関係がないため、以後無視する。

まず、これらの共分散行列は、株式と金利が無相関とした仮定より内外株式に関する2×2次のQ_1と金利関連資産に関する4×4次のQ_2によって、

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

とブロック対角行列で表現できる。さらに制約は、負債が資産額に対してK倍であることだから、

$$(0,0,0,0,0,1)y = -K \qquad (28)$$

なので、これもy_1, y_2への分割に問題がない。期待リターンについても同様に$v = (v_1', v_2')'$に分けると、最適化問題は、

$$\text{maximize} \quad v'y - \frac{\lambda}{2}y'Qy$$

$$= \left(v_1'y_1 - \frac{\lambda}{2}y_1'Q_1y_1\right)$$

$$+ \left(v_2'y_2 - \frac{\lambda}{2}y_2'Q_2y_2\right), \qquad (29)$$

$$\text{subject to} \quad (0,0,0,1)y_2 = -K$$

となる。2種の株式に関する部分と、金利関連資産に関する部分に分けて考えることが可能であることが分かる。

さてこれらの解であるが、式(29)の第2項は1番目の変数(国内債券)と4番目の変数(負債)が完全に相関しているので、さらに変形する。y_2をさらに3つの資産を表す$\hat{y}_2$と負債に分けて、期待リターンベクトルと共分散も、

$$v_2 = \begin{pmatrix} \hat{v}_2 \\ \beta\delta \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12}' & \beta^2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

と3次と1次の部分に分ける。q_{11}は内外債券

(注16)　ここで$\sigma_S^2 = \alpha^2\sigma^2$となるのは、株式収益率の分散がすべて金利ファクターで説明される場合であるが、現実にそうしたことは起こり得ない。したがって、この解は存在する。

と外貨の共分散行列であるが、これらはそれぞれ独自の変動成分を持っているので逆行列が存在する。金利関連資産に関する目的関数は、

$$v_2'y_2-\frac{\lambda}{2}y_2'Q_2y_2$$
$$=(\hat{v}_2+\lambda Kq_{12})'\hat{y}_2-\frac{\lambda}{2}\hat{y}_2'q_{11}\hat{y}_2+\text{定数} \quad (30)$$

と変形されるので、最適解は、

$$y_1^*=\frac{1}{\lambda}Q_1^{-1}v_1,\quad \hat{y}_2^*=\frac{1}{\lambda}q_{11}^{-1}(\hat{v}_2+\lambda Kq_{12}) \quad (31)$$

である。

なお、この結果を外国資産と外貨がない式(9)に対応させて考えると、$v_1=H_s, Q_1=\sigma_s^2, \hat{v}_2=\delta, q_{11}=\sigma^2, q_{12}=\beta\sigma^2$ であるから、最適株式投資比率(10)式で $\alpha=0$ としたもの、および最適ポートフォリオデュレーション(12)が得られる。

C　固有リスクの追加

ここでも同様に、長期債/短期債を導入して2資産の資産配分問題に帰着させて考えよう。式(18)の共分散行列は、

$$Q=\begin{pmatrix}\sigma_S^2 & \alpha L\sigma^2 & \alpha S\sigma^2 & \alpha\beta\sigma^2\\ \alpha L\sigma^2 & L^2\sigma^2+e & LS\sigma^2+e & L\beta\sigma^2\\ \alpha S\sigma^2 & LS\sigma^2+e & S^2\sigma^2+e & S\beta\sigma^2\\ \alpha\beta\sigma^2 & L\beta\sigma^2 & S\beta\sigma^2 & \beta^2\sigma^2+f\end{pmatrix} \quad (32)$$

と変更される。長期債と短期債の間で分散投資効果を与えないために、両者が同じ固有変動を持つ形となる。前節と同様の変換を行うと、2資産問題にした時の期待リターンベクトルと共分散行列は、

$$\hat{\mu}=\begin{bmatrix}H_s-S\delta-\lambda(\alpha-S)(S-\beta K)\sigma^2+\lambda e\\ (L-S)(\delta-\lambda(S-\beta K)\sigma^2)\end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$\hat{Q}=\begin{bmatrix}\sigma_S^2+S^2\sigma^2-2\alpha S\sigma^2+e & (L-S)(\alpha-S)\sigma^2\\ (L-S)(\alpha-S)\sigma^2 & (L-S)^2\sigma^2\end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。後は、$\hat{x}^*=\frac{1}{\lambda}\hat{Q}^{-1}\hat{\mu}$ を計算すればよい。

ここで興味深いのは、負債の固有リスク f が消えてしまっていることである。

謝辞

本稿を執筆するにあたり、米澤康博教授（横浜国立大学）より多くの助言と有益なコメントをいただきました。アクチュアリーの加藤圭一氏（中央三井信託銀行）からは年金負債について、債券ファンドマネージャーの柴田宏樹氏（同）からは債券市場の実際についてアドバイスをいただきました。記して感謝します。なお、文中で意見にわたる部分は所属する組織を代表するものではなく筆者個人の見解である。また、文中に誤りがあれば筆者個人の責任である。

（本稿は投稿原稿を採用したものです。）

参考文献

[1] Keuth P. Ambachtsheer. Pension fund asset allocation : In defense of a 60/40 equity/debt asset mix. *Financial Analysts Journal,* pp. 14-24, September-October 1987.

[2] Guiford G. Babcock. Duration as a link between yield and value. *The Journal of Portfolio Management,* pp. 58-65, Summer 1984.

[3] Richard Bookstaber and Jeremy Gold. In search of the liability asset. *Financial Analysts Journal,* pp.70-80, January-February 1988.

[4] Paul Bostock, Paul Woolley, and Martin Duffy. Duration-based assed allocation. *Financial Analysts Journal,* pp. 53-60, January-February 1989.

[5] Jhon Y. Campbell, Andrew W. Lo, and A. Craig Mackinlay. *The Econometrics of*

Financial Markets. Princeton, 1997.

[6] E.J.Elton and M.J.Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley, 1995.

[7] Michael R. Granito. The problem with bond index funds. *The Journal of Portfolio Management*, pp. 41-47, Summer 1987.

[8] Martin L. Leibowitz. The dedicated bond portfolio in pension funds — part I : Motivations and basics. *Financial Analysts Journal*. pp. 68-75, January-February 1986.

[9] Martin L. Leibowitz. Total portfolio duration : A new perspective on asset allocation. *Financial Analysts Journal*, pp.19-29, September-October 1986.

[10] Martin L. Leibowitz. Liability returns : A new look at asset allocation. *The Journal of Portfolio Management*. pp. 11-18, Winter 1987.

[11] Martin L.Leibowitz, Lawrence N. Bader, and Stanley Kogelman. *Return Targets and Shortfall Risks*. IRWIN, 1996.

[12] Dennis E. Logue and Jack S. Rader. 年金学入門。金融財政事情研究会、2000。刈屋武昭 監訳 年金工学研究会 訳。

[13] William F. Sharpe and Lawrence G. Tint. Liabilities — a new approach. *The Journal of Portfolio Management*, pp. 5-10, Winter 1990.

[14] 中央三井信託銀行年金運用研究会、パッシブ・コア戦略。東洋経済新報社、2001。米澤康博 監修。

[15] 米澤康博、大森孝造、金利変動リスクと債券ポートフォリオ。笹井均、浅野幸弘(編)、資産運用理論の新展開。日本経済新聞社、近刊。