

リスク推定値の時系列を用いたアクティブ戦略評価

みずほ年金研究所 統合リスク管理サービス室

中 島 英 喜

目 次

- | | |
|-------------------------------|------------------------|
| 1. はじめに | 4. アクティブ戦略における効率的リスク管理 |
| 2. 基本的な考え方 | 5. アクティブ戦略の評価方法 |
| 3. アクティブ戦略におけるリスク (TE) 管理の重要性 | 6. まとめ |

投資家がファンドマネジャーに投資の代行を委託する場合、投資対象や投資戦略に関して両者の知識格差（「情報の非対称性」）が生じる。リスク管理に関する情報を利用すると、こうした知識格差の緩和を期待できる。ただし、そのためには、投資のリスクを一定の精度で事前に計量できることが条件になる。本稿では、効率的投資におけるリスク計量の意義を整理し、リスク推定値の時系列を利用したアクティブ戦略評価のフレームワークを示す。

1. はじめに

近年、投資をリスク管理（コスト見合いで管理された挑戦と甘受）の観点で定義する投資観が注目されている。年金基金等の機関投資家の一部は、この投資観に基づくアプローチを実用化している（堀江 [2001]）。このアプローチを採用すると、投資の意思決定はリスクを表す統計量の配分という形で記述される。このため、このようなア

プローチは、risk allocation もしくは risk budgeting 等と呼ばれる。

このアプローチのメリットの一つは、多数の投資機会を、相対的に少数のリスク因子とその影響度（因子負荷量）によって系統的に記述する点にある。投資家が外部の代理人（ファンドマネジャー）に投資を委託する場合、個々の投資機会や全体的な投資戦略について知識の格差が生じやすい。こうした知識格差は「情報の非対称性」と呼



中島 英喜（なかしま ひでき）

1989年東京大学工学部建築学科卒業、同年安田信託銀行入社、2004年7月より現職。2004年筑波大学大学院ビジネス科学研究科企業科学専攻修了、博士（経営学）。著書に『年金資産運用の理論と実践』（共著、2002年、日本経済新聞社）、論文に「動的因子モデルに基づくグローバル資産市場のリターン予測：月次リターンの同時確率分布の事前推定」（『現代ファイナンス』No.13、2003年）等がある。

ばれ、資源配分の効率性を阻害する恐れがある(倉澤 [1988])。この時、投資をリスク配分で考えるアプローチを採ると、こうした情報の非対称性の抑制を期待できる。

ただし、このメリットを実際に享受するには、投資を代行する（より多くの情報を持つ）ファンドマネジャーが投資機会集合のリスク構造をある程度正確に推定することが前提となる。この点に関し、多くのファンドマネジャーは、既に何らかのリターンモデルを用いてリスクを事前計量できる環境にある。また、上述のような投資家の出現も、リスクの推定精度が一定のレベルに達した証左と見なすことができよう。

本稿では、個々の投資機会に対する知識が十分でない投資家が、外部のアクティブマネジャーの投資戦略を定量評価する枠組みを示す。評価に当たっては、評価対象戦略のリスク推定値の時系列（履歴）が重要な役割を果たす。本稿では、この時系列をアクティブマネジャーから入手することを前提としているが、投資家が自ら計量しても差し支えない。本稿で示す系統的な評価は、年金基金のような機関投資家が直ちに実行に移せるものであり（注1）、投資家の投資観（リスク配分アプローチの採否）は一義的には問題にならない。

本稿の構成は以下のとおり。まず、第2節ではアクティブ戦略の評価に関する基本的な考え方を示す。第3節ではリスク管理の重要性を整理し、第4節ではアクティブ戦略における効率的リスク管理の方針（定量評価の前提条件）を明らかにする。さらに、第5節では、この管理方針に則したアクティブ戦略の定量評価の枠組みを示す。第6節はまとめである。

2. 基本的な考え方

2.1 アクティブ戦略のリターン分解

第 t 期初におけるアクティブ戦略のポートフォリオ（個々の投資機会への資金配分：ベクトル）を π_t とすると、当期の安全利子率に対する同戦略の超過リターン r_t （単変量）は次式で表される（ x' はベクトル x の転置を表す）。

$$\begin{aligned} r_t &= \pi_t' R_t \\ &= \pi_{M,t}' R_t + \pi_{A,t}' R_t \\ &= r_{M,t} + r_{A,t} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\pi_{M,t}$ はベンチマークポートフォリオであり、 $\pi_{A,t}$ はファンドマネジャーの裁量によるポートフォリオである（ $\pi_t = \pi_{M,t} + \pi_{A,t}$ ）。また、 R_t は第 t 期の投資機会（リスク資産の超過リターン）集合である。これらの変数（ $\pi_t, \pi_{M,t}, \pi_{A,t}, R_t$ ）はベクトルであるが、便宜的に単変量と考えても構わない。

(1)式は、アクティブ戦略の超過リターンが、ファンドマネジャーの裁量に依存しないmarket orientedな部分 $r_{M,t}$ と、裁量に依存したmanager orientedな部分 $r_{A,t}$ に分割できることを示している。以下では、 r_t を戦略リターン、 $r_{M,t}$ を市場リターン、 $r_{A,t}$ をアクティブリターンと呼ぶ。

市場リターン $r_{M,t}$ のヘッジ機会が存在する場合、アクティブリターン $r_{A,t}$ は単独の投資機会になり、portable alpha などと呼ばれる。このportable alphaと市場リターン $r_{M,t}$ の時系列が無相関である（もしくは相関が小さい）場合（注2）、portable alphaは、いわゆる hedge fundや alternative 投資と同列に扱うことができる。

アクティブ戦略のリスクをベンチマークポート

（注1） 標準的な表計算ソフトがあれば十分であるが、外部のコンサルタントに委託することも可能である。

フォリオに対する tracking error (TE: ω_t) によって評価する考え方は、マネジャーの裁量に起因するアクティブリターン ($r_{A,t}$) を独立の投資機会と認識する立場に相当する。

$$\omega_t = \sqrt{\text{var}_{t-1}(r_{A,t})} \quad (2)$$

ここで $\text{var}_t(\bullet)$ は、第 t 期末時点で利用可能な情報で条件付けた条件付き分散オペレータである (当該情報による条件付けを以下では単に条件付けと略称)。また、この時、manager oriented なリターン ($r_{A,t}$) と、market oriented なリターン ($r_{M,t}$) は、いずれも当期の安全利子率に対する超過リターンとして認識される。このため、前者に関する information ratio (IR: ϕ_t) と後者に関する Sharpe ratio (SR: ψ_t) は、各投資機会の効率性を評価する尺度として直接比較できる (ここで $E_t(\bullet)$ は条件付き期待値オペレータ)。

$$\begin{aligned} \phi_t &= \alpha_t / \omega_t \\ \psi_t &= \mu_t / \sigma_t \\ (\alpha_t &= E_{t-1}(r_{A,t}), \mu_t = E_{t-1}(r_{M,t}), \sigma_t = \sqrt{\text{var}_{t-1}(r_{M,t})}) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 アクティブマネジャーの評価と情報の非対称性

こうした考え方は、投資をリスク配分の枠組みでとらえるアプローチの基礎をなす。このアプローチを採用する投資家は、アクティブマネジャーの採用に当たり、各マネジャーが提供するアクティブ戦略の TE 水準と IR 水準を最重要視する。なぜなら、これらのパラメータは、最適リスク配分

(基本資産配分、スタイル管理、パッシブ/アクティブ比率、マネジャーストラクチャー) の決定に際して重要な役割を果たすからである。

ただし、最適リスク配分の決定は、数年に一度というのが一般的であり、意思決定に用いる TE ($\bar{\omega}$) と IR ($\bar{\phi}$) は、こうした中長期的 ($t=1, \dots, T$) な投資期間に対応した評価値でなくてはならない (注3)。これらのパラメータは、(3)式に示した短期の定義 (第 t 期単独の TE (ω_t) や IR (ϕ_t) とは必ずしも一致しない。

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \sqrt{\text{var}_0(r_{A,1} + r_{A,2} + \dots + r_{A,T})/T} \\ \bar{\phi} &= \{E_0(r_{A,1} + r_{A,2} + \dots + r_{A,T})/T\} / \bar{\omega} \end{aligned} \quad (4)$$

すなわち、投資家がアクティブ戦略を評価する場合、①期待した TE を中長期的に実現できるかという点と、②期待した IR を中長期的に達成できるかという点が特に重要になる。しかし、これらのパラメータは観測不能であり、上記2点を確定的に評価するのは難しい。このため、通常は、観測されたサンプル (リターン実績) を基に、統計的な手法によってこれら2点を評価することになる。

よく用いられる方法の一つは、短期的なアクティブリターン $r_{A,t}$ が独立に同一の確率分布に従う (independently and identically distributed: i.i.d.) と仮定し、過去 ($t \leq 0$) に観測されたサンプル ($r_{A,t+1}, \dots, r_{A,t+N}; \tau+N \leq 0$) に基づいて、次式の推定値を求めるものである (注4)。こうした推定値は、モデルの選択 (この場合はアクティブリターンに対する i.i.d. 仮定) が正しかったとしても、当

(注2) 例えば、ベンチマークポートフォリオ $\pi_{M,t}$ の変動が小さく、かつアクティブポートフォリオ $\pi_{A,t}$ が投資期間 $t=1, \dots, T$ において偏りが無い場合 ($\pi_{A,1} + \dots + \pi_{A,T} \approx 0$)、アクティブリターン $r_{A,t}$ と市場リターン $r_{M,t}$ の時系列は無相関に近づく。

(注3) 本稿の議論において、中長期や短期は抽象的な期間であるが、具体的なイメージを持つために、前者については3～5年程度、後者については1カ月程度を想定しても構わない。

然推定誤差を含む。

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= \sqrt{\{ \sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} \dot{r}_{A,t}^2 - N(\sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} \dot{r}_{A,t} / N)^2 \} / (N-1)} \\ \hat{\phi} &= (\sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} \dot{r}_{A,t} / N) / \hat{\omega}\end{aligned}\quad (5)$$

この方法の利点は、アクティブリターン $r_{A,t}$ の時系列サンプルさえ入手できれば、特に難しい知識がなくても必要なパラメータを簡単に推定できる点にある。実際、多くの投資家は、これに準じた方法でアクティブ戦略の評価を行っていると思われる。

しかし、この方法は、前提とするリターンモデルの選択に大きな問題がある。この問題は、主にアクティブポートフォリオ $\pi_{A,t}$ のリバランス($\pi_{A,t} \neq \pi_{A,t+1}$)に伴って顕在化する。

$$\omega_t = \sqrt{\pi_{A,t}' \Omega_t \pi_{A,t}} \quad (6)$$

(6)式は、アクティブ戦略の第 t 期におけるリスク($TE: \omega_t$)のパラメトリック表現である。ここで、 Ω_t は第 t 期におけるアクティブ戦略の投資機会集合 R_t (個別証券や市場インデックスの超過リターン)に関する条件付き共分散行列を表す($\Omega_t = \text{var}_{t-1}(R_t)$: これも単変量で考えて差し支えない)。同式を見て分かるとおり、たとえアクティブ戦略の投資対象(R_t)がi.i.d.に従い、 $\Omega_t = \Omega$ ($t=1, \dots, T$)を仮定できたとしても、リバランス($\pi_{A,t} \neq \pi_{A,t+1}$)を伴うアクティブ戦略のリターン($r_{A,t}$)がi.i.d.に従う保証はない。

次節以降で述べるように、リバランスを伴うアクティブ戦略において、TE(ω_t)の時系列管理は、戦略の効率性やリターン特性に大きな影響を与える。この時、TEの時系列推定は、当該管理において不可欠な要素になる。(6)式を見て分かるとお

り、アクティブ戦略のTEは、アクティブポートフォリオ($\pi_{A,t}$)と投資対象 R_t の条件付き共分散行列(Ω_t)を入手すれば計算可能である。実際に戦略を執行しているファンドマネジャーは、これらのパラメータを適切に把握していることが期待される。一方、委託者である投資家がこれらの情報を把握しているケースは限定的であり、この情報を十分活用しているケースはさらに少数だと考えられる。

この情報の非対称性は、投資の代理人である(もしくは代理人候補である)ファンドマネジャーに当該情報(ω_t ; $t=\tau+1, \dots, \tau+N$)の提供を求めるだけで解消可能である。次節以降では、アクティブ戦略の運営においてリスク($TE: \omega_t$)の管理が果たす役割を明らかにするとともに、その履歴を定量評価に活用する方法を示す。

3. アクティブ戦略におけるリスク(TE)管理の重要性

アクティブ戦略のリスク(TE)を定量評価する場合、「期待したTEを評価期間を通じて全体的に実現していたか」という点と、「期待したTEを評価期間を通じて効率的に実現していたか」という点が重要になる。前者は評価期間全体のTEの総量管理(量的側面)に着目したものであり、後者は評価期間内におけるTEの配分管理(質的側面)に着目したものである。以下では、これら2点の重要性を簡単に説明する。

3.1 リスク(TE)の総量管理の重要性

一般にリスク管理というと、リスクの抑制・排

(注4) 期待値の推定を要するIRの評価については、定性評価を併用することが多い。本稿第5節に示したマネジャー評価の枠組みは、IRや期待値の推定方法によらず適用可能である。

除を意味することが多い（例えば、オペレーションリスク等）。しかし、投資家はアクティブマネジャーがアクティブリスクにチャレンジすることを期待しているのであり、意図に反したアクティブリスクの（中長期的）抑制は、投資家の効用を損なう。これには、①期待アクティブリターン（アルファ）の低下という直接的側面と、②投資家の投資機会の収奪という間接的側面の二つがある。

①の側面は、IRの定義式を思い出せば簡単に理解できる。すなわち、IR ($\bar{\phi}$) が期待どおりだとしても、TE ($\bar{\omega}$) が期待水準に満たないならば中長期的なアルファ ($\bar{\alpha} = E_0(r_{A,1} + r_{A,2} + \dots + r_{A,T})/T$) は達成できない。

$$\bar{\alpha} = \bar{\phi} \times \bar{\omega} \quad (7)$$

また、IR ($\bar{\phi}$) が期待以上で目標アルファを達成できたとしても、投資家が本来有していたリスクの枠を無駄にしたという問題は残る。すなわち、当初の意図に反してTEを抑制することは、投資家がチャレンジできたはずの追加的な投資機会を奪っていることに相当する。これが、上記②の側面である。

このように、アクティブマネジャーにとって、アクティブリスクは目標値を意識してコントロールすべきものであり、上限を守ればよいというものではない。

3.2 リスク（TE）の配分管理の重要性

TE管理におけるもう一つのポイントは、「期待したTEを評価期間を通じて効率的に実現していたか」という点である。これは、あるアクティブ戦略の投資機会（リスクの配分先）を適当に分割

できる時に、これら投資機会を効率的に利用（リスクを配分）し、投資期間全体におけるIRの最大化を図っていたかを問うものである。

投資機会の分割は、リスクの源泉に着目したクロスセクショナルなものと、投資機会の変化に着目した時系列なものに分けられる。前者は、いわゆるrisk budgetingを個別戦略の内部で行うことに相当する。この種のリスク配分が問題になるのは、超過収益の源泉を複数に分けた戦略である（例えば、「①セクター配分と②銘柄選択に着目した戦略」等）。

一方、時系列方向の投資機会の分割は、ポートフォリオのリバランスを伴うおよそすべてのアクティブ戦略で問題になる。特に、戦術的資産配分戦略、デュレーションコントロール戦略、セクターローテーション戦略といったリスク因子の負荷量を変化させる（タイミングをとる）戦略では、時系列のリスク配分が大きな問題になる。また、「確信度に応じてリスクにチャレンジする」といった戦略も同様の問題を有する。

アクティブ戦略の効率性を考える上で、これら二つのリスク配分は、いずれも重要な役割を果たす。しかし、多くの場合、「リスクの配分」というとクロスセクショナルなリスク配分を取り上げることが多く、時系列方向のリスク配分が取り上げられることは少ない（注5）。このため、以下では、この時系列方向のリスク配分に焦点を当て、問題の所在と考え方の枠組みを整理する（クロスセクショナルなリスク配分についても同様の議論が成立する）。

（注5） 多くの実務家が参照しているGrinold/Kahn [1995] も、リスクの時系列管理についてはほとんど言及していない。

3.3 リスク (TE) の時系列管理の重要性

投資期間1年のアクティブ戦略を二つ考える。一つは、毎月1%のTEを継続する戦略 ($\omega_1 = \dots = \omega_{12} = 1\%$) であり、もう一つは、最後の1カ月だけ $\sqrt{12}\%$ のTEをとる戦略 ($\omega_1 = \dots = \omega_{11} = 0\%$, $\omega_{12} = \sqrt{12}\%$) である。投資期間全体のTE ($\bar{\omega}$) を見る限り、これら二つの戦略は同一である。しかし、短期的なIRが一定であるならば ($\phi_1 = \dots = \phi_{12} = \phi$)、毎月1%のTEを継続する戦略 (均一TE戦略) の方が、期間全体のIR ($\bar{\phi}$) が高くなる。

$$\frac{12(\phi \times 1\%)}{\sqrt{12}\%} > \frac{11(\phi \times 0\%) + 1(\phi \times \sqrt{12}\%)}{\sqrt{12}\%}$$

上の不等式は、上記2戦略の通期IRを比較したものである。この不等式を見ると、均一TE戦略の通期IRを表す左辺 ($=\sqrt{12}\phi$) が、不均一TE戦略を表す右辺 ($=\phi$) の $\sqrt{12}$ 倍に達していることが分かる。これは、後者の戦略を採用したマネジャーが、与えられたリスクを無駄 (非効率) に使ったことを意味する。

しかし、後者の戦略が常に非効率というわけではない。例えば、何らかの理由である時期 (ここでは12カ月目) の予測能力が高くなる戦略を採用している場合 (例えば、レアイベントの予測能力がある場合; $\phi_1 = \dots = \phi_{11} = \phi$, $\phi_{12} = 10\phi$)、後者の不均一TE戦略の方が、期間全体のIR ($\bar{\phi}$) が高くなる。下の不等式は、先の2戦略の通期IRを比較したものであるが、毎月1%のTEを継続する戦略の通期IR (左辺 $= 21\phi / \sqrt{12}$) は、不均一TE戦略 (右辺 $= 10\phi$) の6割程度にとどまる。

$$\frac{11(\phi \times 1\%) + 1(10\phi \times 1\%)}{\sqrt{12}\%} < \frac{11(\phi \times 0\%) + 1(10\phi \times \sqrt{12}\%)}{\sqrt{12}\%}$$

すなわち、アクティブマネジャーは、自己の短期的なIR (ϕ) の評価に応じて短期的TE水準

(ω_t) を適当にコントロールすることで、評価期間全体のIR ($\bar{\phi}$) を高め、与えられたリスクの枠 ($\bar{\omega}$) を効率的に利用できるのである。

4. アクティブ戦略における効率的リスク管理

4.1 ファンドマネジャーの効率的TE管理戦略

投資期間 ($t=1, \dots, T$) における短期的IRの時系列 ($\phi_1, \dots, \phi_T$) と全体的TE水準 ($\bar{\omega}$) を所与とすると、ファンドマネジャーの最適戦略における短期的TEの管理は、IRの変動に比例することになる。以下、この点を簡単に確認しておく。

まず、 T 期間にわたる投資のIR ($\bar{\phi}$) を考える。第 t 期におけるアクティブマネジャーの短期的予測能力 (IR) が ϕ_t ($t=1, \dots, T$) で与えられ、当期のアクティブポートフォリオのTEが ω_t で与えられるとすると、当期のアクティブリターンの期待値は、 $\alpha_t = \phi_t \times \omega_t$ で与えられる。この時、 T 期間にわたる投資の期待超過リターン ($\bar{\alpha}$)、TE ($\bar{\omega}$) およびIR ($\bar{\phi} = \bar{\alpha} / \bar{\omega}$) は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \sum_{t=1}^T \alpha_t / T \\ \bar{\omega} &= \sqrt{\sum_{t=1}^T \omega_t^2} / T \\ \bar{\phi} &= \frac{\sum_{t=1}^T (\phi_t \times \omega_t)}{\sqrt{T \sum_{t=1}^T \omega_t^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

さらに、この時、短期的なTE水準 ω_t は、最適TE管理において次の一階条件を満たす。

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \omega_t} = \frac{\phi_t}{\sqrt{T \sum_{t=1}^T \omega_t^2}} - \frac{\sum_{t=1}^T (\phi_t \times \omega_t)}{\sqrt{T} \left(\sqrt{\sum_{t=1}^T \omega_t^2} \right)^3} \omega_t = 0$$

投資期間における全体的TE水準 ($\bar{\omega}$) を所与としてこの一階条件を解くと、最適TE管理におい

て短期的TE水準 ω_t が満たすべき以下の必要条件が導かれる。

$$\omega_t = k \times \phi_t \quad (9)$$

ここで、 $k = [\sum_{t=1}^T \omega_t^2] / [\sum_{t=1}^T (\phi_t \times \omega_t)] = \bar{\omega} / \bar{\phi} > 0$ である。なお、短期的IRの時系列 $(\phi_1, \dots, \phi_T)$ のうち、第1期のIR (ϕ_1) 以外は、投資の開始時点 $(t=0 \text{ 期末})$ において一般に不確実である((4)式参照)。このため、この比例乗数 k を定めるには、第2期以降の短期的IR $(\phi_2, \dots, \phi_T)$ の同時確率分布を明らかにした上で、動的最適化を行う必要がある。本稿では問題を簡単にするため、本節の冒頭で述べたように、第2期以降の短期的IRの時系列 $(\phi_2, \dots, \phi_T)$ についても、期初 $(t=0 \text{ 期末})$ において確定的に与えられると仮定する。

4.2 投資家の期待効用最大化とIRの最大化

簡単のため、市場リターン $(r_{M,t})$ とアクティブリターン $(r_{A,t})$ の無相関を仮定する。さらに、ある投資家が、パッシブマネジャーとアクティブマネジャーの同時採用を考えており、その期待効用関数 $\bar{U}$ が、投資期間 $t=1, \dots, T$ において次式で与えられると仮定する。

$$\begin{aligned} \bar{U} &= E_0 [\sum_{t=1}^T U_t] \\ U_t &= E_{t-1} [\eta_t r_{M,t} + \theta_t (r_{M,t} + r_{A,t})] \\ &\quad - 0.5 \lambda \text{var}_{t-1} [\eta_t r_{M,t} + \theta_t (r_{M,t} + r_{A,t})] \\ &= [(\eta_t + \theta_t) \mu_t + \theta_t \alpha_t] - 0.5 \lambda [(\eta_t + \theta_t)^2 \sigma_t^2 + \theta_t^2 \omega_t^2] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 U_t は第 t 期における当該投資家の短期的期待効用であり、 λ はこの投資家のリスク回避度である。また、 $\mu_t, \alpha_t, \sigma_t, \omega_t$ は、それぞれ、第 t 期における市場リターンとアクティブリターンの条件付き期待値 (μ_t, α_t) および条件付き標準偏差 (σ_t, ω_t) である。さらに、 η_t と θ_t は、それぞれ、第 t 期におけるパッシブマネジャーとアクティブ

マネジャーへの資金配分を表わす。これらのパラメータのうち、 ω_t はアクティブマネジャーの制御変数であり、 η_t と θ_t は投資家の制御変数である。

また、4.1節と同様、問題を簡単にするため、アクティブ戦略に関する短期的IRの時系列 $(\phi_2, \dots, \phi_T)$ と、パッシブ戦略に関する条件付き統計量の時系列 $(\mu_2, \dots, \mu_T$ と $\sigma_2, \dots, \sigma_T)$ は、期初 $(t=0 \text{ 期末})$ において確定的に与えられると仮定する。この時、この投資家が期待効用 $\bar{U}$ の最大化を図るには、下記の1階条件を同時に満たす必要がある。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \omega_t} &= \theta_t (\phi_t - \lambda \theta_t \omega_t) = 0 \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta_t} &= \mu_t - \lambda (\eta_t + \theta_t) \sigma_t^2 = 0 \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta_t} &= [\mu_t - \lambda (\eta_t + \theta_t) \sigma_t^2] + \omega_t (\phi_t - \lambda \theta_t \omega_t) = 0 \end{aligned}$$

上式の導出に当たっては、アクティブリターンの条件付き期待値 α_t と、当期の短期的なインフォメーションレシオ ϕ_t の関係 $(\alpha_t = \phi_t \times \omega_t)$ を用いている。これによると、アクティブマネジャーが自己の戦略のIRを最大化して(9)式が満たされている限り、投資家は、下式に示されるように、アクティブマネジャーへの資金配分比率 θ_t を一定 (θ^*) に保つことで、自己の期待効用 $\bar{U}$ を最大化できることが分かる。

$$\begin{aligned} \theta^* &= \phi_t / (\lambda \omega_t) \\ &= 1 / (\lambda k) \\ &= \bar{\phi} / (\lambda \bar{\omega}) \end{aligned} \quad (11)$$

すなわち、投資家がアクティブマネジャーへの資金配分について静的政策を採用するためには、アクティブマネジャーが自己の戦略のTE水準を動的に管理して中長期的IRを最大化していることが条件になる(注6)。

さらに、4.1節で示した比例乗数 k の定義式

($k = \bar{\omega} / \bar{\phi}$) とIRの最大化条件 ($\omega_t = k \times \phi_t$)、および上記の期待効用最大化条件 (II式) を同時に加味すると、効率的投資において投資家がとるべきアクティブリスクの総量 $\sqrt{T} \bar{\omega}^*$ (期間 $t=1, \dots, T$) は次のようになる。

$$\begin{aligned} T(\bar{\omega}^*)^2 &= \sum_{t=1}^T (\theta^* \omega_t)^2 \\ &= (\theta^* k)^2 \sum_{t=1}^T \phi_t^2 \\ &= (1/\lambda)^2 (\sum_{t=1}^T \phi_t^2) \end{aligned} \quad (12)$$

これにより、投資家がとるべきアクティブリスクの総量は、投資家のリスク回避度に応じて減少し、アクティブ戦略の中長期的IR水準に応じて増加することが分かる。また、投資期間を通したIRの水準 ($\bar{\phi}^*$) は次式で与えられ、投資家の属性に依存しないことが分かる。

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^* &= \frac{\theta^* \sum_{t=1}^T \alpha_t / T}{\bar{\omega}^*} = \frac{\theta^* \sum_{t=1}^T (\phi_t \times \omega_t)}{(1/\lambda) \sqrt{T \sum_{t=1}^T \phi_t^2}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T (\phi_t^2 / \lambda)}{(1/\lambda) \sqrt{T \sum_{t=1}^T \phi_t^2}} = \sqrt{\sum_{t=1}^T \phi_t^2 / T} \end{aligned}$$

5. アクティブ戦略の評価方法

前節までの整理に従い、本節では、TE推定値の時系列を用いたアクティブ戦略の定量評価の枠組みを示す。評価のポイントは以下の5点である (TEの推定を自ら行う投資家の場合、第1のポイントは自己のTE推定能力の評価になる)。

5.1 短期TEの推定能力

第1のポイントは、短期TEの推定能力を見るものである。短期TEの推定はアクティブ戦略のリスク管理におけるインフラに相当する。アクティブマネジャーは自己の戦略のTEを時系列で評価し、効率的に管理することが期待される ((9式参照)。この時、TEの推定が正しくなければ、管理の効率性も担保できない。また、以下に示す評価のフレームワークも、短期TEが正しく推定されていることを前提としている。

ここでは、ある期間 ($t = \tau+1, \dots, \tau+N$) のTE推定精度を同期間の実績アクティブリターン ($r_{A,\tau+1}, \dots, r_{A,\tau+N}$) に基づいて評価する方法を二つ示す。一つの方法は、アクティブマネジャーから入手したTE推定値の時系列 ($\hat{\omega}_{\tau+1}, \dots, \hat{\omega}_{\tau+N}$) を(8式)に代入し、その結果得られた当該期間のTEの推定値 ($\hat{\omega}$) を(5式)の標本標準偏差 ($\bar{\omega}$) と比較するものである。

$$\hat{\omega} = \sqrt{\sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} \hat{\omega}_t^2 / N}$$

短期的なTE (ω_t) やIR (ϕ_t) が均一でない限り、(5式)に基づく標本分散 ($\bar{\omega}^2$) は、(8式)の中長期的TEの2乗 ($\bar{\omega}^2$) を過大評価する。詳細は省略するが (注7)、このバイアスは $\alpha_t = \phi_t \omega_t$ の標本分散に相当し、修正可能である。また、通常、このバイアスは ($\bar{\omega}^2$ に対して) 相当小さいと考えられるため無視することもできる。

この方法の問題点は、TE推定の時系列性 ($r_{A,t}$ と $\hat{\omega}_t$ の対応) が捨棄される点にある。すなわち、サンプリング期間のTEの総量さえ合致していれば

(注6) μ_t / σ_t^2 が一定でない場合、投資家が期待効用を最大化するには、パッシブマネジャーへの資金配分を動的に管理する必要がある ($\eta_t^* = \mu_t / (\lambda \sigma_t^2) - \theta^*$)。しかし、パッシブマネジャーが、安全資産と市場インデックスの投資割合をこれに準じてコントロールするならば (オーパレイマネジャーによるTAAを含む)、パッシブマネジャーへの最適資金配分も一定になる。

(注7) この部分と脚注8に関するノートを希望する読者は筆者まで連絡頂きたい (nakashima@mizuho-pri.co.jp)。

ば、時系列的な変動の違い（推定の誤り）は検出できない。この問題を回避するには、観測されたアクティブリターンのサンプルを当期のTE推定値で除し、基準化リターン ($\hat{r}_{A,t}/\hat{\omega}_t$) の時系列に変換するのが有効である。

TEの推定が正しく行われているという仮説の下で、この基準化リターンは、平均 $=\phi_t$ 、分散 $=1$ の確率分布から抽出したサンプルと見なされる。さらに、この確率分布が正規分布であり、 ϕ_t の不均一性（標本分散）が1に比べて十分小さいならば（実際、後述の図1における実線の傾きは十分小さい）、この時系列の標本分散（自由度調整後）に $N-1$ を乗じたものは、近似的に自由度 $N-1$ のカイ2乗分布に従う（注8）。

また、TE変動の推定が適切である場合、基準化リターンの標本尖度は、基準化前のアクティブリターンの標本尖度より平均的に小さくなる（注9）。一方、TEの変動を正しく推定できていない場合、基準化リターンの標本分散は、Jensenの不等式により真の分散を平均的に過大評価（ >1 ）する。

上述のように、サンプリング期間におけるTE推定値の誤差がトータルで打ち消し合っている場合、最初に述べた方法ではこれらの誤差を検出できない。しかし、基準化リターンを用いる方法では、上記2点に着目することによって推定値の適否を確認できる。

5.2 TEの総量管理

第2の評価ポイントは、評価期間のTE水準が

適切であったかを問うものである。既に述べたように、アクティブ戦略のマネジャーは、投資家から預かったリスク枠を投資期間を通して使い切る必要がある。したがって、この評価ポイントは、量的な観点に立った評価と言える。この評価ポイントは、短期TEを正しく推定できている限り（上記の第1ポイント）、確率的側面を持たない。

5.3 中長期的IRの実現

第3の評価ポイントは、期待されたIRを事後的に達成できたかという点である。こちらの方はリターンの期待値に関する評価を含むことから、質的な観点に立った評価と言える。しかし、期待値の推定誤差は分散の推定誤差に比べて相対的に大きい。このため、明確な結論を導くことができるケースは限定的であろう。すなわち、帰無仮説として「評価対象マネジャーの付加価値創出能力はゼロである（ $\bar{\phi}=0$ ）」を取り上げるにせよ、「評価対象マネジャーの付加価値創出能力は期待水準 $\phi^\#$ に等しい（ $\bar{\phi}=\phi^\#$ ）」を取り上げるにせよ、これらの仮説を有意に棄却できることは限定的であると思われる。これは、当該マネジャーが有能であるとも自己認識を誤っているとも言えないことを意味する。

ちなみに、アクティブリターンが $r_{A,t}=\alpha_t+\omega_t\varepsilon_t$ ($\varepsilon_t\sim\text{i.i.d.N}(0,1)$) に従っている場合、以下の関係が成立する（(4)式参照）。

（注8） ϕ_t の不均一性を無視できない場合、この近似は、基準化リターンの真の期待値と分散をいずれも過小評価する。したがって、この近似による検定は、後述の標本分散の過大評価バイアスを保守的に検定する。これは、TE推定誤差の検出力が高まることを意味する。

（注9） あくまで標本尖度の「期待値」に関する大小関係であり、標本ごとに成立する関係ではない。この議論に関するメモを希望する読者は筆者まで連絡頂きたい。

$$\sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} (\dot{r}_{A,t}/N)/\bar{\omega} = \sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} (\alpha_t + \omega_t \dot{\varepsilon}_t)/(N\bar{\omega}) \quad (13)$$

$$= \bar{\phi} + \sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} \omega_t \dot{\varepsilon}_t/(N\bar{\omega})$$

ここで、 $N\bar{\omega}^2 = \sum_{t=\tau+1}^{\tau+N} \omega_t^2$ であるから、(13)式の右辺第2項は $N(0, 1/N)$ に従う。この関係を利用すれば任意の帰無仮説「 $\bar{\phi} = \phi'$ 」を検定できる。

5.4 TEのリスク源泉別配分

第4の評価ポイントは、超過収益の源泉（リスク因子）が複数に及ぶアクティブ戦略について、クロスセクショナルなTE配分が適切であったかを問うものである。

(9)式に示したTEの効率的管理の原則は、時系列方向だけではなく、クロスセクション方向でも妥当する（この場合、時期を表す添字 t は、超過収益の源泉となるリスク因子 j （ $j=1, \dots, J$ ）に置き換えられる）。したがって、流動性の制約等による戦略執行の問題がない限り、クロスセクショナルなTE配分は、各収益源泉に関する当該戦略のIRに比例する。すなわち、クロスセクショナルなTEの配分に格差を設けているマネジャーは、自己の予測能力に（源泉別）格差があることを暗に示していると考えられる。

したがって、事前に明示したTEの配分と事後的に推定されたTEの配分を直接比較することで、ファンドマネジャーの自己認識の一貫性を問うことができる（量的評価に該当）。これに対し、ファンドマネジャーに予測能力の適宜修正を許容しているならば、5.3節の検証をリスク因子別に行えばよい（これは質的評価に該当）。ただし既述のとおり、後者の検証によって明確な結論を導き出すことができるケースは限定的だと思われる。

5.5 TEの時系列管理

このように、質に関する評価をIRの期間平均に関して行うことは通常難しいと考えられる。これに対し、「与えられたTEの時系列管理」という観点で質に関する評価を行う場合、比較的明確な結論を導くことが可能である。

第5の評価ポイントは、このTEの効率的利用を問うものである。4.1節で示したように、アクティブマネジャーが自己の戦略のIRを中長期的に最大化している場合、短期的なIRとTEの間には(9)式の関係（ $\omega_t = k \times \phi_t$ ）が成立する。

この時、短期的なTEで基準化したアクティブリターン（ $r_{A,t}/\omega_t$ ）は、5.3節の仮定（ $r_{A,t} = \alpha_t + \omega_t \varepsilon_t$; $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.} N(0, 1)$ ）の下で、短期的なIR（ ϕ_t ）の周りに分布する。

$$r_{A,t}/\omega_t = \phi_t + \varepsilon_t = (1/k) \omega_t + \varepsilon_t$$

したがって、アクティブ戦略が効率的に運営されている場合、短期的なTEで基準化したアクティブリターン（ $r_{A,t}/\omega_t$ ）を縦軸にとり、横軸に短期的なTE（ ω_t ）をとった散布図は、右上がりの傾向を示すはずである。すなわち、この散布図の回帰直線の傾きを検定することで、効率的なTE管理が図られているか否かを検証できる。

なお、この基準化リターン（ $r_{A,t}/\omega_t$ ）は、評価対象戦略のアクティブポートフォリオ $\pi_{A,t}$ を適宜スカラー倍した戦略（ $\pi_{stdA,t} = c_t \pi_{A,t}$ ）に相当する。ここで、スカラー係数は、 $c_t = 1/\omega_t$ であるから、この修正戦略（ $\pi_{stdA,t}$ ）はTE平準化戦略と呼ぶべきものである。言うまでもなく、このTE平準化戦略のTEは常に1になる。逆に、このTE平準化戦略が効率的であるためには、短期的なIRが均一である必要がある（ $\phi_1 = \dots = \phi_T = \phi$; (9)式参照）。

このため、評価期間におけるTE平準化戦略のIRを評価対象戦略のIRと比較することで、「アク

ティブマネジャーの短期的IRが均一である」という帰無仮説を検証できる。

上記の散布図を用いた検証に先立ってこの検証を行うと、全体の見通しが良くなる。

また、こうした検証とは別に、TE推定値の時系列プロットを眺めることも重要である。このプロットにおいて、季節性、トレンド、もしくは急激な変化が生じている場合、ファンドマネジャーのモラルハザード（TE時系列管理の怠慢や期末の一発逆転狙い等）が疑われる（注10）。

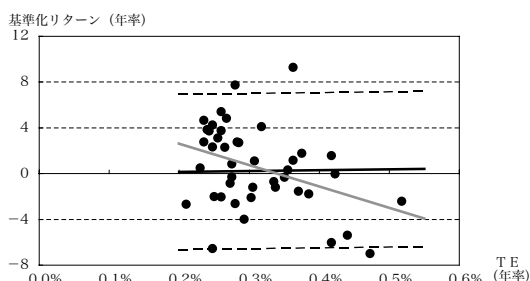
5.6 TEの時系列管理の評価例

図1は、ある匿名のファンドマネジャーから入手したアクティブリターン実績値とTE推定値を用いて、5.5節の効率的TE管理を評価したものである（注11）。同図の横軸は、評価対象戦略の推定TE（ $\hat{\omega}_t$ ）であり、縦軸は同月の基準化リターン（ $\hat{r}_{A,t}/\hat{\omega}_t$ ）である。同図のプロットは、いずれも月次サンプリングによるものであるが、表示は適当に年率化している。

図1において、評価対象戦略が仮定している効率的なTE管理戦略は右上がりの実線で示される（(9)式参照）。さらに、基準化リターンが正規分布に従うと仮定すると、月次の基準化リターンは95%の確率で同図の破線の内側に位置することになる。実際、同図を見ると、全サンプルの93%が同領域に収まっており、評価対象戦略の仮定が一見成立しているように見える。

しかし、基準化リターンのサンプルを同期の推定TEに回帰すると、回帰直線（網線）の傾きは右下がりになり、評価対象戦略の仮定（右上がり）

図1 ある戦略の推定TE（ $\hat{\omega}_t$ ）と基準化リターン（ $\hat{r}_{A,t}/\hat{\omega}_t$ ）の関係（月次サンプルの年率表示）



- (注) 1. TE（年率）は、月次リターンの推定TEを $\sqrt{12}$ 倍したもの。
 2. 基準化リターン（年率）は、月次リターンの実現値を当期の推定TE（月率）で除し $\sqrt{12}$ 倍したもの。
 3. 実線は、戦略が仮定している効率的TE管理戦略に相当する。同線の傾きは、(9)式より算定している。
 4. 破線は、基準化アクティブリターン（年率）が正規分布に従う時の95%タイル境界。
 5. 網線は、基準化リターンを推定TEに回帰した時の回帰直線。

やTE平準化戦略の仮定（水平）は統計的に有意に棄却される（回帰直線の傾きのt値は-2.62）。これは、時系列に見て「相対的に予測能力が高まった」と考える時の予測が、むしろ外れやすいことを意味している。

実際、サンプリング期間におけるこのアクティブ戦略の実績IRは年率0.25であるが、短期的なTEを単純に平準化させるだけで同期間のIRは年率0.57まで改善する（TE平準化戦略）。すなわち、こうした戦略を所管しているファンドマネジャーは、何らかの認識バイアス（短期的なIR推定に関するシステムティックな誤り）を有している可能性が高い。

（注10） 矢野〔2001〕はこうしたモラルハザードの研究例を紹介している。

（注11） データ提供者の厚意に感謝する。なお、提供者のプライバシーを守るため、戦略とデータの紹介は割愛する。

6. まとめ

本稿では、アクティブ戦略における効率的TE管理戦略を明らかにし、TEの時系列推定値を用いたアクティブ戦略評価の枠組みを示した。これによると、リスク（TE）の時系列推定値を利用することで、リターンの実績値だけでは得られなかった情報を数多く入手できることが分かる（注12）。

これらの情報の恩恵を最も享受できるのは、ファンドマネジャーに投資を委託する投資家である。こうした投資家がまず最初に行うべきは、ファンドマネジャーが挑戦したリスク（TE）の総量とその時系列プロットを見て、ファンドマネジャーのモラルハザードをモニタリングすることである。その上で、各要素リターンへのリスク配分や、TEの効率的管理（図1）を確認すれば、各マネジャーの特性をより明確につかむことができる。

本稿で示した定量評価の枠組みは、わずかなデータを追加的に入手すれば、さして難しい知識を要することなくアクティブ戦略の特徴を明確にできる。これは、投資家とファンドマネジャーとの

間に生じる情報の非対称性を大きく緩和できることを意味している。

本稿の作成に当たり、倉澤資成先生（横浜国立大学）、椿広計先生（筑波大学）、牧本直樹先生（筑波大学）から貴重な御助言を頂きました。また、3名の匿名レフェリーの先生からも有益なコメントを頂きました。記して感謝申し上げます。なお、言うまでもなく、本稿に錯誤があれば著者の責任です。

（本稿は投稿原稿を採用したものです。）

【参考文献】

- 倉澤資成 [1988] 『入門 | 価格理論（第2版）』日本評論社。
- 堀江貞之 [2001] 「リスク・バジェットティングの現状とその意義」証券アナリストジャーナル 第39巻、4号、pp.29-46。
- 矢野学 [2001] 「リスク予算による運用リスク管理」証券アナリストジャーナル 第39巻、4号、pp.47-64。
- Grinold, R. C. and R. N. Kahn [1995] *Active portfolio Management*, McGraw-Hill.（明治生命特別勘定運用部、日興証券アセットマネジメント本部訳 [1999] 『アクティブ・ポートフォリオ・マネジメント』東洋経済新報社）。

（注12） 逐次的な意思決定において、リスク推定値は事前の意思決定の内容に相当し、リターン実績値はその事後的結果に相当する。両者の対応（具体的には基準化リターン： $r_{A,t}/\omega_t$ ）を時系列で把握することにより、ファンドマネジャーのリスク計測能力（5.1節）やリスク管理能力（5.5節）を、MPT本来の意味で評価できる。