特集　コピュラ：信用リスク管理の新たな視点

解　　題

早稲田大学大学院ファイナンス研究科
教授　森　平　爽一郎

1．なぜ「コピュラ」に注目すべきなのか？

ブラック＝ショールズモデルで有名なノーベル経済学賞受賞者であるショールズは次のように述べている。

「…このように市場の崩壊は数学モデルの失敗、とりわけオプション価格評価モデルの失敗だという声も聞こえてきました。これは、私見になりますが、この見方は誤りです。…中略…、第３に、ソロモンブラザーズ証券出身のトレーダーは、銘柄同士の相関が十分低いために、ポジションの維持に必要な資金は確保出来ると信じていたからです。ところが、建玉のすべてについて損失が出始めると、どの相関係数も１に近づいていてしまいました。もはや、LTCMは建玉を混乱している市場で手仕舞うことはできずに、同社の資本金は吹き飛んでしまったのです。（マイロン・ショールズ、「金融工学誕生の秘話」、Breit and Hirsch［2008］所収）」

同様なことは日本でも形を変えても生じた。ソフトバンク社はボーダフォン買収資金の借り換えに伴う余裕資金750億円を合成CDO（Collateralized Debt Obligation、債務担保証券、吉羽論文2.2節を参照）で運用していた。このCDOは160銘柄で構成されていたが、そのうち７銘柄が破綻すると456億円の損失が、８銘柄で投資額750億円が全損する仕組みであった。2008年10月29日の時点で６銘柄デフォルトしていた。その後、2009年４月には全損が確定した旨の発表があった。

この２つの事実は、ロシア経済危機やリーマンショックといった市場急落期には、あらゆる資産の価値が一斉に低下するという共倒れリスクを、平時にあっても想定し、対策をあらかじめ講じなければいけないことを示唆している。伝統的な「相関係数」が有する問題点を克服した「共倒れリスク」の尺度、言い換えれば「裾（テイル、Tail）依存性」を表現する方法が求められる。それが本特集のテーマである「コピュラ」である。「コピュラ」と言う統計手法が統計の専門家の間でさえ一般的になったのは1980年代になってからである（Nelsen［1999］第１章）。「コピュラ」の一早い金融への応用は保険数理、とりわけ生命保険数理で成された。特別な生命保険として連生保険（例えば、かんぽ生命の「夫婦保険」）は、夫婦が一緒に加入することができる生命保険である。問題はこの連生（夫婦）保険の価格をどう決めたら良いかである。もし、夫婦の死亡が独立して、互いにバラバラに生じるのであれば、問題は簡単である。夫と妻の年齢別のそれぞれの定期（かけ捨て）の保険価格を合計したものでよい。ところが、多くの場合夫婦の片方が死亡すると、残された方は

早く死亡することが知られている（そうでない事例も少なからずあるかもしれないが！）。そうならば、夫婦間の寿命の相互関連性、特に寿命分布の裾依存性を考慮して連生（夫婦）保険価格を高めに設定しなければならない。この様な場合の保険価格決定方法として用いられたのが「コピュラ」である。

では、夫を企業A、妻を企業Bに置き換え、夫婦の寿命を企業の寿命に置き換え、死亡を企業のデフォルトに置き換えたらならば、連鎖倒産（川口他論文参照）を考慮した新しい信用リスク関連資産の価格決定が可能になるであろう。あるいは、夫と妻を２つの（サブプライム）住宅ローンに置き換え、同様な問題設定を試みたらどうなるであろうか？

この点に気が付き、コピュラの応用論文を書いたのがデービット・リー（David Li［2000］である。この論文は、統計や確率の基礎さえ分かれば理解が容易であるように書かれたものであったため広く注目を浴びた。リーは日経新聞のインタビューに対し、冒頭次のように回答している。

「老夫婦の１人が亡くなると、もう１人も亡くなる確率が高まる。そんな統計学的な概念を数式にした。JPモルガン・チェース系の調査会社にいた2000年、論文にして発表すると電話が殺到し、話題になった（日経新聞、2013年10月13日朝刊ページ）」

ところが、サブプライ危機の到来とともに、コピュラ、より正確には正規分布を仮定する「正規コピュラ」を用いたサブプライム住宅ローンを原資産とするさまざまなデリバティブ価格、特にそのCDOの価格が暴落した。

悪者探しがはじまった。規制当局は投資銀行を、投資銀行は格付け機関を、格付け機関はクオンツやアナリストを、そしてクオンツやアナリストは、元になった論文を書いたリーを批判した。最後に残ったリーは後ろを振り向いたが誰もいなかった、というのが実情である（斯波論文の冒頭を参照）。

事実、正規コピュラは、「ウォールストリートを破綻させた公式（The Formula that Felled Wall St.）、Jones［2009］」とか「ウォールストリートを死に至らしめた公式（The Formula that Killed Wall Street）、Salmon［2012］」との酷評がなされた。後者の論文はアメリカ統計学会の2010年「Excellence in Statistical Reporting Award」を受賞している。

しかし、コピュラのすべてが悪かったのではない。数多くあるコピュラの内で「正規コピュラ」に問題があったのである。今回の４つの論文で等しく指摘されているように、正規コピュラ以外のコピュラ、例えばｔコピュラ（斯波論文を参照）を用いれば問題は部分的にせよ回避できたのである。論文の著者リーは引き続いて、インタビューで次のように述べているように、

「数式はサブプライムローンには適用されるべきでなかった。企業の信用リスクに比べて住宅ローンのリスクは複雑だ。そう何度も訴えたが、理解を得るのは難しかった（日経新聞、前掲ページ）」

つまり、応用分野に問題があったのかもしれない。

以下の第２節では、コピュラの直感的な理解を得るために図を用いた説明をおこなう。アナリスト１次試験テキスト第３回（小林・本田［2013a］の知識が既にあれば、この節をとばして、第３節の４つの掲載論文の概略説明を直接参照できる。

2．コピュラ：その直感的な理解

2.1　コピュラとは

コピュラ（Copula、接合分布関数）とは、古く

はラテン語で「連結」を意味することばであり言語学や論理学において使われことになった。例えば、I am Japanese（私は日本人です）という文章では、私（I）と日本人（Japanese）を結びつける「am（は、です）」がコピュラにあたる。統計学やファイナンスでも最近よく使われる言葉に成っている。

では、統計学やファイナンスでは、何と何を結びつけるものをコピュラというのだろうか？　答えは、「同時確率分布と周辺分布」を結合するのがコピュラである。例えば、体重（日経225）と身長（S&P500）の同時分布を、体重（日経225）の周辺分布と身長（S&P500）の周辺分布と結びつけるものがコピュラである。何でこんなことを考えなければいけないのだろうか？　２つの確率変数の間の関係は、アナリストであれば誰でも知っている相関係数や共分散で十分ではないかと思われるかも知れない。しかし塚原論文でも指摘されているように、相関係数は、両者の線形（正比例）関係を表すものであり、日経225とS&P500が取りうる価格範囲の限られた範囲に限って成立する関係を示すものでしかない。相関係数がゼロであったとしても両者の間に相互関連は存在するのであり、その関係性を表すようなリスク尺度が必要になる。それがコピュラである。

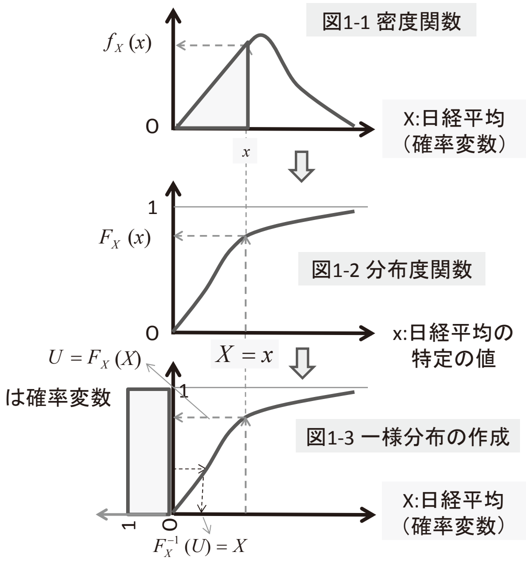
2.2　コピュラとはなにか：絵を描いて理解する

コピュラの理論的な側面については、斯波論文と塚原論文で詳細に示されているが、ここでは、Meucci［2011］を参考にいくつかの図を用い両論文で使われている数式の意味をまず理解することにしよう。

図表１の一番上の**図１－１**は横軸に将来株価、例えば１年後の日経平均株価 X を置き、縦軸は、１年後の日経平均価格の可能性を連続的なヒストグラム、つまり密度関数 $f_X(x)$ で表したものである。縦軸は日経平均の１年後の特定の価格、例えば $X=(x=13{,}000$円$)$ が実現する度合い（密度）を示しているので密度関数（Density Function）と呼ばれる。１年後の日経平均が $x=13{,}000$円以下になる可能性を示す確率 $\Pr(X<x)=\Pr(X<13{,}000)$ は、**図１－１**の密度関数の下の塗りつぶした面積で示される。ここで $x=13{,}000$円を一般化して、$x=0$円から $x=$無限大までにして示したのが**図１－２**である。これを累積密度関数（cdf：Cumulative Density Function）、あるいは分布関数と呼ぶ。数式では $F_X(x)$ と表現する。つまり**図１－２**の横軸は、一年後の日経平均株価が縦軸で示される日経平均の特定の値 $X=x$ 以下になる確率を示している。当然縦軸の値は最低ゼロ（ゼロ円以下になる確率はゼロ）、最高１（無限大以下になる確率は１）である。

図１－３は、**図１－２**の横軸が１年後の日経平均の特定の値であったのに対し、今度は日経平均のあらゆる可能な値、従ってランダムに変動する日

図表１　密度関数、分布関数、分布関数による変換（一様分布）の意味



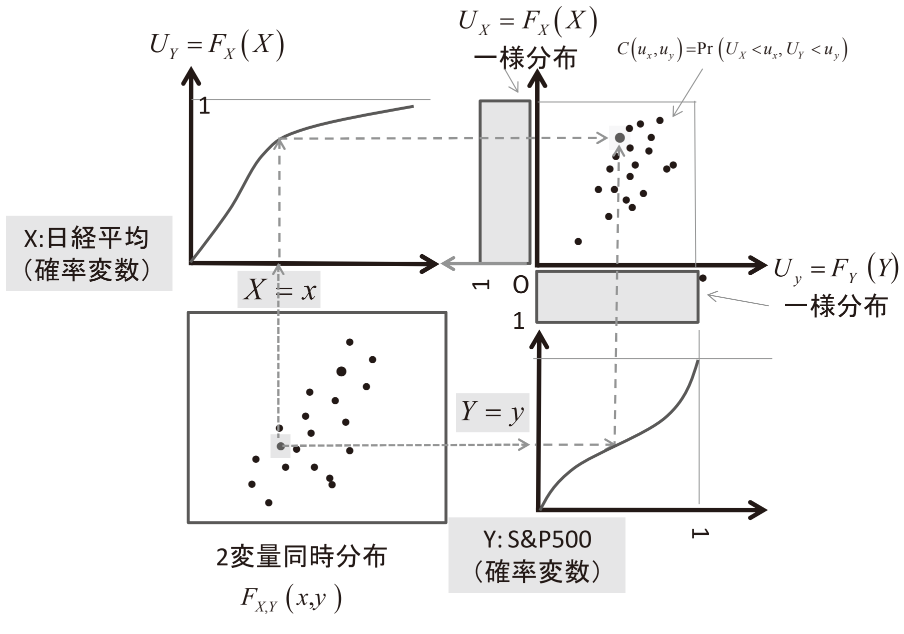
経平均の値を与えた時に縦軸の値がどうなるかを考えたものである。横軸で示される原因が１年後の日経平均の可能なランダムな値（確率変数）なので、結果として**図１－３**の縦軸の値も確率変数になる。ではこの結果はどのような確率分布に従うのであろうか？　斯波論文の2.4節で厳密に証明されているように、[0,1]区間に分布する一様分布になる。

ここで注意すべきことは、このような変換を施す意味を理解することである。一見すると無意味な変換のように思われる。なぜなら、**図１－１**では横軸で示される１年後の日経平均株価の可能性を山型の確率「密度」として表していたものが、変還後の**図１－３**では、そうした情報が、一様に分布する確率変数によって、全く打ち消されてしまっているからである。

変換を施す意味は、同様のことを別の確率変数に対しておこない、何が言えるかを考える必要がある。**図表１**で日経平均株価を例にとって説明したことをS&P500株価指数についても同じことを行いもう１つの一様分布を計算してみよう。**図表２**の右上はこの結果得た２つの一様分布を散布図として示したものである（斯波論文の**図表８**、**図表10**はおおよそこの**図表２**の散布図に対応している）。一様分布は、日経平均とS&P500という２つの周辺分布が持つ情報は失っているものの、残った２つの株価指数を示す分布関数間の「相関」や「関係性」を依然として保持している。これがコピュラである。言い換えれば、コピュラは同時確率分布$F_{X,Y}(x, y)$から周辺分布が有する情報を取り去ってあとで残ったもの同士の同時分布である。**図表２**の右上の散布図であるコピュラは、斯波論文の式(1)と(2)、塚原論文の式(3)と(2)に対応している。

さらに、斯波論文の2.5節で説明されているように、**図１－３**で得た日経平均に対応する一様分布を、それとは異なる任意の分布関数の逆関数（斯波論文節2.3）をもちいて他の分布に従う確率変

図表２　２変量コピュラの考えかた



数に（単調）変換することができる。こうした変換は**図表３**に示されている。図で①→②→③→④という道順をたどってみれば、数式で表現された直感的な意味を理解することが出来る。こうした単調変換された物同士についてのコピュラは変換前確率変数についてのコピュラの性格を変えない。その意味で、コピュラは極めて柔軟な性格を有する「関係性」の尺度なのである。

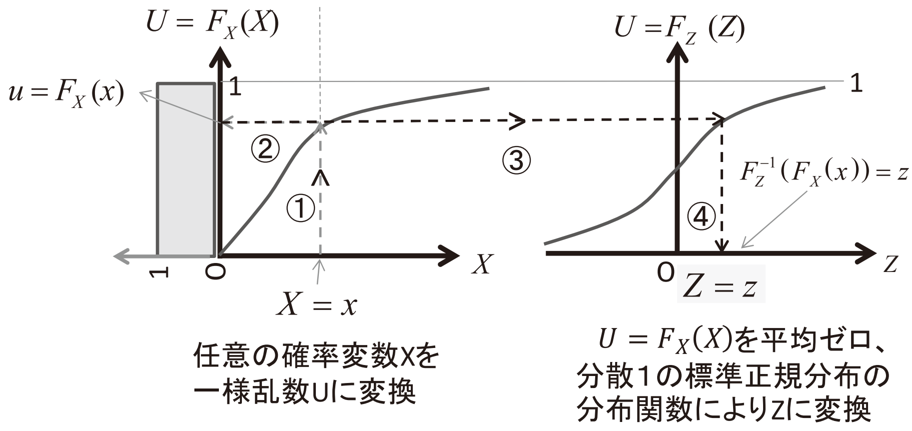
３．各論文の概要

掲載論文はコピュラの基礎理論と拡張を説明した斯波、塚本論文、コピュラ理論の金融面への応用を議論した吉羽、川口他論文の４編からなる。なお最初の２篇のコピュラ理論論文を理解するためには、証券アナリスト試験テキストである小林・本田［2013a］の第２章「統計学の基礎」が最低限必要である。また小林・本田［2013b］の第５章「分布のファットテール」も参考になる。

斯波論文「ガウシアンコピュラの信用リスク管理への１応用について」では、まずコピュラを理解するための分布論に関する復習をおこなう。逆分布関数（パーセンタイル点）や２変量ｔ分布、塚原論文で言及される順位相関などは上記テキストで説明されていないので説明に注意すべきであろう。その後、もっとよく使われる正規コピュラの考えかたを数式と図をもちいて説明をしている。正規（ガウシアン）コピュラは「分布のファットテール」や異なる資産分布の裾同士の相関を十分把握出来ていないが、ｔコピュラはこの問題を少なからず解決できることを数値例とグラフを使って説明している。**図表８、９、10**と関連の図表が何を意味しているのか、どの様な手順で描かれているのかを理解することが、応用のみに関心のある読者にとっても重要であろう。

斯波論文では、コピュラ理論の入門的な解説が成されたあとで、正規コピュラを用いて、企業のデフォルトが債務超過によって生じると考え、デフォルト確率を計算する方法を説明している。前半の理論の理解は、この応用例を参照することでも深めることができる。なお、これは吉羽、川口他論文でマートンモデルとして言及されているものであり、他の応用事例を理解する上でも重要である。また、ここで説明されたデフォルト確率計算の方法は、いわゆるBIS-IIあるいはIII規制のもと、銀行、保険、証券会社が準備しなければいけ

図表３　XをZに変換：任意の確率変数Xを①→②→③→④という道順をたどることにより標準正規確率変数Zに変換をする（斯波論文2.5節）



ない最低必要自己資本算定を計算するためにも用いられている。リーマンショック時に欧米の投資銀行が十分な自己資本を保有していなかったことが非難されているが、その責任の一端は正規コピュラに基づく自己資本比率規制にあったことも、斯波論文を良く理解すれば分かるであろう。

塚原論文「接合分布関数（コピュラ）―その類型と理論の展望―」は、斯波論文を受けて、正規やtコピュラ以外のさまざまなコピュラについて、それらを相互に比較検討している。まず、関連性の尺度としてよく用いられている「ピアソンの相関係数」の問題点を指摘したあとで、それに変わるものとしてコピュラの重要性とそれが満たすべき３つの基本条件を説明している。

またコピュラによる相互依存性を測る尺度としての順位相関、特にケンドールのτ（タウ）について説明が行われている。ケンドールのτは川口他論文での応用例を理解する上でも重要である。さらに、分布の裾同士の相互依存性の大きさを測る「裾依存性係数」が説明されている。コピュラに関するこうした基本概念を明らかにした上で、さまざまな異なるコピュラ関数について言及している。吉羽、川口他による応用論文では、塚原論文で説明されているさまざまなコピュラを用いた実証結果が示されている。応用事例を理解する上でも、ここで示されたいくつかのコピュラの持つ特徴を、それらの数式と対応する**図表1**から**図表3**を通じて理解することが大事であろう。異なるコピュラを用いることで、分布の裾依存性がどの様によく表現出来ているかを図表からも理解することが肝要である。

塚原論文ではこうしたこれまでにもよく用いられているコピュラのみならず、コピュラの理論の最近の動向を展望している。一つは将来１時点のコピュラを考えるのでなく、時系列でのコピュラ、つまりダイナミック・コピュラを考えるものであり、他の一つは、３資産以上の多資産の相互依存性を直接検討し、比較的容易に実装可能なコピュラの可能性を考えるものである。前者はいわばコピュラの確率過程を考えようとするものである。後者に関しては、これまでのコピュラの実務への適用が、２資産をペアにした時のコピュラ、あるいは多資産に共通するごく少数の共通ファクターを想定することにより、計算負荷を軽くし、理論的な複雑性を回避しようとするものであったの対し、ヴァイン・コピュラと呼ぶ多数資産の相互依存性を直接取り扱える方法の可能性を議論している。

吉羽論文「コピュラの金融実務での活用の展望」では、先の２論文で明らかになったコピュラを金融においてどのような応用が可能であるのか、また応用にあたってどのような点に注意すべきかを議論している。金融実務への応用としては、1）信用リスク管理、2）市場リスク管理、3）ERM（全社的リスク管理）への適用例が示されている。

信用リスク管理に関しては、まずCDO（債務担保証券）の理論価格決定においてコピュラが果たす役割について議論をしている。とりわけ、正規コピュラについて、それがリーマンショック時のCDO価格の暴落をよく説明出来なかった理由であることを、仮想ポートフォリオを用いて検証している。正規コピュラは、価格急落時の分布の裾依存性を無視するようなものであったことを、他のさまざまなコピュラを用いた時と比較して結論づけている（**図表1**を参照）。信用リスク分析におけるもう一つの応用事例としては、信用リスクのある与信ポートフォリオの将来の損失分布のVaR（バリューアットリスク）推定に、どのようなコピュラを用いるべきかがある。同じ特性を有する１万社からなる与信ポートフォリオのVaR

を、４つのコピュラをもちいた時のVaR計算例が**図表２**に示されている。この場合は、正規コピュラ以外のコピュラは「共倒れ」リスク、つまり裾依存性を正規コピュラより良く捉えていることが明らかになっている。

吉羽論文では、さらに市場リスク管理においても正規コピュラ以外のコピュラの方が、相場急落時の共倒れリスク、すなわち裾依存性を良く示すことができることをいくつかのシミュレーション事例で明らかにしている。一つは、米国、欧州、日本の株価指数から計算された投資収益率の２カ国ずつをペアにしたときの裾依存性を（**図表４**で）、もうひとつは日本の株と債券の日時リターンの相互依存性を、リーマンショックを含む2007年10月～2012年９月の期間で、正規コピュラとそれ以外のいくつかのコピュラを用いて検討し、債券と株をそれぞれ500億円投資したポートフォリオのリスク量を計算している（**図表５**）。

金融機関は信用リスク、市場リスクをはじめさまざまなリスクを抱えている。これなどのリスクの間の相互依存性を考慮して、金融機関全体として合算をした、例えばVaR等のリスク量を計算する必要がある。これが最近注目をされているERM（全社的リスク管理）である。

さらに、こうしたコピュラを実際の金融実務に適用するにあたって、理論との整合性に注意を払いつつ、1）どのようなコピュラを選択すべきか？その基準とは、２）さまざまなコピュラを性格づける分布パラメータの推定方法、３） 解析解が得られない時、モンテカルロ法を用いたコピュラの実装にあたっての問題、などに注意を払うべきであるとしている。

塚原論文では３資産以上を考えた時、それらの間の相互依存性を、一要因モデルのような単純な資産価値モデルを前提にせずに、直接取り扱える手法としてヴァイン・コピュラを勧めているが、**川口・山中・田代論文「コピュラの実務への適用例—与信集中リスク評価への応用—」**は、このヴァイン・コピュラをもちいて与信ポートフォリオにおける多くの業種への分散投資効果、言い方をかえれば、業種集中与信リスクを計測し、多次元の正規コピュラを用いた時と、与信ポートフォリオのVaRがどの様に異なるかを、仮想的なポートフォリオを構築して検証をしている（**図表７**と**８**）。この論文の実証結果と塚原論文のヴァイン・コピュラに関する理論的な説明を比較検討することによりヴァイン・コピュラの理解をより深めることができるであろう。ヴァイン・コピュラは先端的なテーマでありその応用例の公刊は数少ない。この論文はそうした意味でも貴重である。

本特集号における４つの論文では、コピュラとは何か、どのようなコピュラがあるのか、コピュラを実際の世界に適用するにあたってはどのような注意を払うべきか、といったことを議論している。とりわけ、すべての論文に共通するのは「正規コピュラ」は景気後退期、とりわけ恐慌時における資産価格分布の裾依存性、砕けた言い方をすれば「共倒れリスク」を良く表現出来ないということであった。また議論をすすめて、正規コピュラに変わるコピュラは何であるかということが議論された。

コピュラを理解することなくして、リスク管理を論ずることはできない。例えば、正規コピュラの問題点がこれだけ指摘されながらも、多くの主要金融機関に適用されるBIS-IIの自己資本比率規制では、依然としてリスク調整後の自己資本比率の計算に当たり分母の計算には正規コピュラが使われている。サブプライム危機を踏まえた新しい

BIS-III規制では、分母の計算方法を変更せずに、自己資本比率計算にあたり、1）分子のコア自己資本の定義を厳格化し、2）国際的な資金調達を行う銀行が満たすべき必要最低限の自己資本比率を引き揚げる、という2点をもって規制の「厳格化」を図っている。しかしこれに対して、本質的な解決に成っていないという批判もある。こうした事例からも、リスクに日々直面しているアナリストにとっては「コピュラ」の理解が必須のものであろう。

〔参考文献〕

小林孝雄・本多俊毅［2013a］、『計量分析と統計学（1）』、証券アナリスト1次レベルテキスト、証券分析とポートフォリオ・マネジメント、第3回、2013、第2章、「統計学の基礎」.

小林孝雄・本多俊毅［2013b］、『計量分析と統計学（2）』、証券アナリスト2次レベルテキスト、証券分析とポートフォリオ・マネジメント、第1回、2013、第5章、「分布のファットテール」.

森平爽一郎［2013］、『信用リスクモデル』、証券アナリスト2次レベルテキスト、第10回、第5章、同時デフォルト確率（JPD）とデフォルト相関、第6章　ポートフォリオの信用リスク.

Breit, William and Barry T. Hirsch,『金融経済の進化に寄与したノーベル賞経済学者たち―碩学の学究生活講演録』、村中健一郎訳、金融財政事情研究会、2008.

Jones, Sam［2009］“The Formula that Felled Wall St,” FT Magazine, April, 24.

Li, David X［2000］“On Default Correlation: A Copula Function Approach,” *The Journal of Fixed Income*,”, 9（4）, 43-54.

Meucci, Attilio［2011］“A New Breed of Copulas for Risk and Portfolio Management,”（May 22, 2011）. Risk, 24, 9, 122-126.

Nelsen, R. B.［1999］An Introduction to Copulas（Lecture Notes in Statistics No. 139）.

Salmon, Felix［2012］“The Formula that Killed Wall Street,” *Significance* 9（1）, 16-20. Also published in *Wired Magazine* 17（2）in the title of “Recipe for Disaster：The Formula that Killed Wall Street,”.